Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
7 giugno 2018

Lo studente che intende avvalersi del voto ottenuto alla prova intermedia svolga <u>solamente</u> gli esercizi n. 3 e n. 4. Il tempo a sua disposizione è di due ore.

Lo studente che non si avvale della prova intermedia svolga tutti e quattro gli esercizi. Il tempo a sua disposizione è di tre ore.

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia S un sottoinsieme di X.

(1a) Il sottoinsieme S di X è detto *localmente chiuso in* (X, τ) se, per ogni $x \in S$, esiste un intorno U_x di x in (X, τ) tale che l'insieme $S \cap U_x$ è chiuso nel sottospazio topologico (U_x, τ_{U_x}) di (X, τ). Si dimostri che S è localmente chiuso in (X, τ) se e soltanto se esistono un chiuso C e un aperto A di (X, τ) tali che $S = C \cap A$.

(1b) Si dimostri che se S è uguale all'unione finita di sottoinsiemi compatti di (X, τ) allora anche S è un sottoinsieme compatto di (X, τ).

(1c) Indichiamo con $(X \times X, \eta)$ il prodotto topologico di (X, τ) con se stesso. Supponiamo (X, τ) sia connesso e S sia un sottoinsieme proprio di X. Si dimostri che il complementare di $S \times S$ in $X \times X$ è un sottoinsieme connesso in $(X \times X, \eta)$.

Esercizio 2. Sia τ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$, sia η la topologia su $\mathbb{R}$ avente come una base la famiglia $\{[a, b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ e sia J l'intervallo $[0, +\infty)$ di $\mathbb{R}$. Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{R}$ ponendo

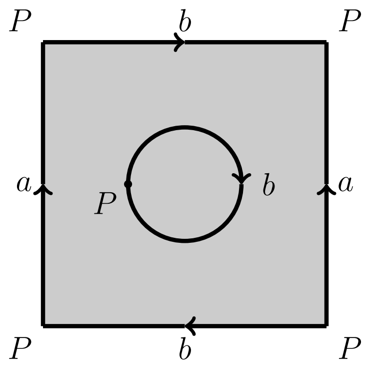
$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ se e soltanto se } |x| = |y|.$$

Indichiamo con $\pi : J \to \mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ la restrizione a J della proiezione naturale, ovvero $\pi(x) := [x]_{\mathcal{R}}$.

(2a) Sia τ_J la topologia indotta da τ su J e sia $(X/_{\mathcal{R}}, \tau')$ lo spazio topologico quaziente di $(\mathbb{R}, \tau)$ modulo $\mathcal{R}$. Si dica, motivando la risposta, se l'applicazione $\pi : (J, \tau_J) \to (X/_{\mathcal{R}}, \tau')$ è un omeomorfismo.

(2b) Sia η_J la topologia indotta da η su J e sia $(X/_{\mathcal{R}}, \eta')$ lo spazio topologico quaziente di $(\mathbb{R}, \eta)$ modulo $\mathcal{R}$. Si dica, motivando la risposta, se l'applicazione $\pi : (J, \eta_J) \to (X/_{\mathcal{R}}, \eta')$ è un omeomorfismo.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio topologico X ottenuto identificando le curve a e b come in figura. I vertici sono tutti identificati nel punto P.



(3a) Si mostri che X ha una struttura di CW-complesso con una 0-cella, tre 1-celle e due 2-celle. Se ne deduca che X è omotopicamente equivalente a $S^2 \vee S^1 \vee S^1$.

(3b) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 4. (4a) Si calcoli il seguente integrale improprio mediante il teorema dei residui:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^3-1} dx.$$

(4b) Si consideri il polinomio $p(z) = z^4 + 3z^2 + z + 1$. Sia A l'intersezione del disco chiuso $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ con il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

1. Mostrare che p ha due radici nel disco chiuso $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e nessuna di esse è reale.
2. Mostrare che p ha una sola radice in A.