# Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

12 giugno 2019

Lo studente svolga i seguenti esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

**Esercizio 1.** Siano $A$, $B$ e $C$ i tre intervalli della retta reale definiti ponendo $A := [-1, 1]$, $B := (-2, 2)$ e $C := [-3, 3]$, e sia $\mathcal{P}(C)$ l'insieme delle parti di $C$. Indichiamo con $\xi$ il seguente sottoinsieme di $\mathcal{P}(C)$:

$$\xi := \{X \in \mathcal{P}(C) \,|\, A \cap X = \emptyset\} \cup \{X \in \mathcal{P}(C) \,|\, B \subset X\}.$$

(1a) Si dimostri che $\xi$ è una topologia su $C$ che non soddisfa la condizione di Hausdorff.

(1b) Si dica se $(C, \xi)$ è uno spazio topologico compatto e/o connesso.

(1c) Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $C$ definita ponendo:

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ se e soltanto se } x = y \text{ oppure } x \neq y \text{ e } \{x, y\} \subset B.$$

Indichiamo con $C/_{\mathcal{R}}$ lo spazio topologico quoziente di $(C, \xi)$ modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : C \to C/_{\mathcal{R}}$ la proiezione naturale al quoziente. Si dimostri che $\pi$ è una applicazione chiusa.

(1d) Sia $(C \times C, \eta)$ la topologia prodotto di $(C, \xi)$ con se stesso. Si calcoli la chiusura e la parte interna del sottoinsieme $A \times B$ di $(C \times C, \eta)$.

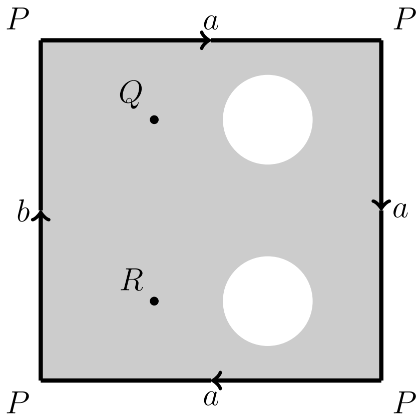
(1e) Si dica se esiste una topologia su $C$ avente $\xi$ come famiglia dei suoi chiusi.

**Esercizio 2.** Si risponda ai seguenti quesiti.

(2a) Sia $\mathbb{S}^2$ la sfera standard di $\mathbb{R}^3$ dotata della topologia euclidea, e sia $Y$ una superficie topologica, ovvero uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, localmente euclideo, a base numerabile e di dimensione 2. Sia ancora $f : \mathbb{S}^2 \to Y$ una applicazione continua che abbia almeno due fibre vuote, ovvero $f^{-1}(p) = f^{-1}(q) = \emptyset$ per qualche $p, q \in Y$ con $p \neq q$. Si dimostri che $f$ non è una applicazione aperta.

(2b) Sia $X$ uno spazio topologico, siano $A$ e $B$ due sottoinsiemi connessi di $X$ e sia $\overline{A}$ la chiusura di $A$ in $X$. Si dimostri che, se $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, allora anche $A \cup B$ è un sottoinsieme connesso di $X$.

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio topologico $X$ ottenuto da un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ mediante le identificazioni descritte in figura.




(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di $X$ e il suo abelianizzato.

(3b) Siano $Q$ e $R$ punti di $X$, e sia $Y$ lo spazio topologico ottenuto identificando i punti $Q$ e $R$ di $X$. Si calcoli il gruppo fondamentale di $Y$.

**Esercizio 4.** Si consideri la funzione $f$ definita come somma della serie di potenze

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

(4a) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze e si calcoli $f'(z)$.

(4b) Si calcoli, mediante il Teorema dei residui, l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+4} dx$$