Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2018/2019

30 agosto 2019

Lo studente svolga i seguenti esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e sia Y un suo sottoinsieme nonvuoto.

(1a) Si dimostri che, se Y è un retratto di X, allora Y è anche chiuso in X. Si fornisca inoltre un esempio di spazio topologico S e di retratto T di S tale che T non sia chiuso in S.

(1b) Supponiamo che X sia metrizzabile tramite una distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Indichiamo con $\overline{Y}$ la chiusura di Y in X. Si dimostri che un punto x di X appartiene a $\overline{Y}$ se e soltanto se $\inf_{y \in Y} d(x, y) = 0$.

(1c) Supponiamo che Y sia costituito da soli due punti. Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su X ponendo:

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ se e soltanto se } x = y \text{ oppure } x \neq y \text{ e } \{x, y\} = Y.$$

Si dimostri che lo spazio topologico quoziente $X/_{\mathcal{R}}$ è di Hausdorff.

(1d) È vero che Y è chiuso in X se e soltanto se $Y \times Y$ è chiuso nel prodotto topologico $X \times X$?

SOLUZIONE: (1a) Sia $r : X \to Y$ una retrazione di X su Y. Consideriamo un punto x di $X \setminus Y$. Proveremo che x è interno a $X \setminus Y$ in X, completando la dimostrazione. Poiché $r(x) \neq x$ (perché?) e X è di Hausdorff, esistono un intorno U di $r(x)$ in X e un intorno V di x in X tale che $U \cap V \neq \emptyset$. Osserviamo che $U \cap Y$ è un intorno di $r(x)$ in Y. Poiché r è continua, esiste un intorno W di x in X tale che $r(W) \subset U \cap Y \subset U$. È ora sufficiente mostrare che l'intorno $V \cap W$ di x in X è completamente contenuto in $X \setminus Y$. Se ciò non fosse vero, allora esisterebbe un punto y in $V \cap W \cap Y$. Seguirebbe che $y = r(y)$ perché $y \in Y$, e $y = r(y) \in r(W) \subset U$ perché $y \in W$. Dunque $y \in V \cap U = \emptyset$, che è assurdo.

Un altro metodo per provare la chiusura di Y in X è il seguente. Sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione naturale. Per definizione di retrazione, la composizione $i \circ r : X \to X$ è una applicazione continua tale che $Y = \{x \in X \,|\, (i \circ r)(x) = \mathrm{id}_X(x)\}$, dove $\mathrm{id}_X : X \to X$ è l'identità su X (perché è vera quest'ultima uguaglianza?). Poiché Y è il luogo di "uguaglianza" di due applicazioni continue a valori in uno spazio di Hausdorff (cioè a valori in X), abbiamo provato in classe che Y è chiuso nel dominio delle suddette applicazioni (cioè in X).

Ecco un esempio di spazio topologico S e di retratto T di S tale che T non sia chiuso in S: $S := \{0,1\}$ dotato della topologia banale, e $T := \{0\}$.

(1b) Poiché la famiglia delle palle aperte $\{B_d(x, \frac{1}{n})\}_{n\geq 1}$ in X è un s.f.i. di x in X, il punto x è aderente a Y in X se e soltanto se esiste una successione $\{y_n\}_{n\geq 1}$ in Y tale che $\lim_{n\to+\infty} d(x, y_n) = 0$. Dalla definizione di estremo inferiore, segue immediatamente che l'ultima condizione è equivalente a $\inf_{y\in Y} d(x,y) = 0$.

(1c) Sia $Y = \{p, q\}$ (con $p \neq q$) e sia $\pi : X \to X/_{\mathcal{R}}$ la proiezione naturale. Siano $x, y \in X$ con $\pi(x) \neq \pi(y)$. Dobbiamo provare che esistono intorni disgiunti di $\pi(x)$ e di $\pi(y)$ in $X/_{\mathcal{R}}$. Ciò equivale a provare l'esistenza di intorni π-saturi disgiunti U di x e V di y in X. Poiché X è di Hausdorff, esistono intorni aperti disgiunti A di x e B di y in X.

Distinguiamo due casi.

Innanzitutto supponiamo che $x \notin Y$ e $y \notin Y$. Poiché X è T_1, Y è chiuso in X in quanto unione finita di punti (chiusi). È dunque sufficiente porre $U := A \setminus Y$ e $V := B \setminus Y$.

Supponiamo infine che $x \in Y$ e $y \notin Y$. A meno di scambiare p con q, possiamo supporre anche che $x = p$. Poiché $y \neq q$ e X è di Hausdorff, a meno di restringere B intorno a y, possiamo supporre che esista un intorno C in q in X tale che $C \cap B = \emptyset$. È sufficiente ora porre $U := A \cup C$ e $V := B$.

(1d) L'affermazione è vera. Infatti, $\overline{Y \times Y}^{X\times X} = \overline{Y}^X \times \overline{Y}^X$. Dunque vale:

$$Y \times Y \text{ è chiuso in } X \times X \Leftrightarrow \overline{Y}^X \times \overline{Y}^X = \overline{Y \times Y}^{X\times X} = Y \times Y \Leftrightarrow \overline{Y}^X = Y \Leftrightarrow Y \text{ è chiuso in } X\,.$$

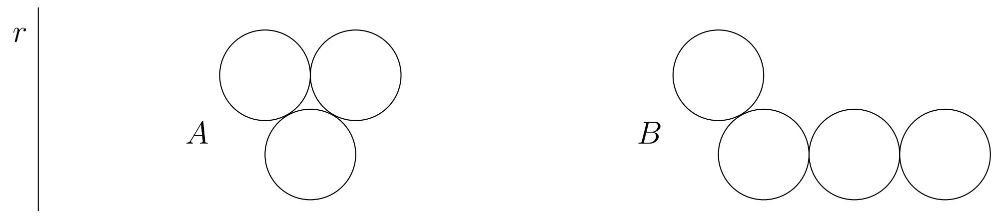
Ecco un altro metodo. Se Y è chiuso in X, allora Y coincide con la sua chusura $\overline{Y}^X$ in X e quindi $\overline{Y \times Y}^{X\times X} = \overline{Y}^X \times \overline{Y}^X = Y \times Y$, ovvero $Y \times Y$ è chiuso in $X \times X$. Supponiamo ora che $Y \times Y$ sia chiuso in $X \times X$. Consideriamo la funzione $\phi : X \to X \times X$ definita ponendo $\phi(x) := (x, x)$. Poiché ϕ è continua (perché?) e $Y = \phi^{-1}(Y \times Y)$, segue che Y è chiuso in X.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia J un suo sottospazio topologico infinito, ovvero J è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ dotato della topologia relativa. Si dimostri che J ammette un sottospazio topologico infinito e totalmente sconnesso.

SOLUZIONE: Se J è illimitato, esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in J tale che $|x_n - x_m| > 1$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. In questo caso $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ è un sottospazio topologico infinito e discreto, e quindi totalmente sconnesso, di J.

Supponiamo che J sia limitato. Alla grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass, J ammette un punto di accumulazione y in $\mathbb{R}$. Esiste quindi una successione iniettiva $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in J che converge a y in $\mathbb{R}$. Segue che il sottospazio topologico infinito $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}) \setminus \{y\}$ di J è discreto e quindi totalmente sconnesso.

Esercizio 3. Siano A e B i sottospazi topologici del piano euclideo rappresentati in figura.



(3a) Si stabilisca se A e B sono omeomorfi e/o omotopicamente equivalenti.

(3b) Si calcolino i gruppi fondamentali degli spazi A e B.

(3c) Sia X lo spazio topologico ottenuto ruotando l'insieme A attorno alla retta r contenuta nel piano. Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

SOLUZIONE: (3a) A e B non sono omeomorfi: lo si può vedere ad esempio osservando che è possibile rendere B sconnesso togliendo un punto opportuno e considerando la restrizione di un eventuale omeomorfismo tra A e B agli spazi privati del punto. A e B sono omotopicamente equivalenti: entrambi sono retratti di deformazione di $\mathbb{R}^2$ meno 4 punti (uno per ogni componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus A$ e di $\mathbb{R}^2 \setminus B$). Oppure si può usare il risultato sui CW-complessi e ottenere che A e B sono omotopicamente equivalenti al bouquet di 4 circonferenze.

(3b) Per il punto precedente, $\pi(A, x_0) \simeq \pi(B, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(3c) Essendo $A \sim B$, X è omotopicamente equivalente allo spazio Y ottenuto ruotando B, cioè all'unione di 4 tori uniti due a due lungo una circonferenza. Si può dunque procedere come nell'es. 3 del compito di luglio 2019, applicando più volte Seifert-Van Kampen. Si ottiene

$$\begin{aligned}\pi(X, x_0) &= \langle \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \mid [\alpha, \beta] = [\gamma, \beta] = [\alpha', \beta'] = [\gamma', \beta'] = 1, \beta' = \beta \rangle \\ &\simeq \langle \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \gamma' \mid [\alpha, \beta] = [\gamma, \beta] = [\alpha', \beta] = [\gamma', \beta] = 1 \rangle \\ &\simeq \langle \alpha, \gamma, \alpha', \gamma' \mid \emptyset \rangle \times \langle \beta \mid \emptyset \rangle \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Lo stesso risultato si può ottenere più semplicemente osservando che X è omeomorfo al prodotto topologico di $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ con S^1, da cui si può ricavare che $\pi(X, x_0) \simeq \pi(S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1, x_1) \times \pi(S^1, x_2) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$.
(Vale sempre: $\pi(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi(X, x) \times \pi(Y, y)$).

Esercizio 4. (4a) Si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x - 2} dx.$$

(4b) Si consideri la funzione di due variabili reali $u(x, y) = x - xy + \log \sqrt{x^2 + y^2}$, con $(x, y) \neq (0, 0)$. Si trovino tutte le funzioni olomorfe con parte reale u.

SOLUZIONE: (4a) L'integrale coincide con $2\pi i$ volte la somma dei residui nel disco unitario della funzione olomorfa

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{\sin x - 2} = \frac{1}{iz} \frac{1}{\frac{z - z^{-1}}{2i} - 2} = \frac{2}{z^2 - 4iz - 1}$$

L'unico polo di f nel disco unitario è $z_1 = (2 - \sqrt{3})i$, con residuo $i/\sqrt{3}$. Quindi $I = (2\pi i)(i/\sqrt{3}) = -2\pi/\sqrt{3}$.

(4b) La funzione u è armonica: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ e quindi, localmente, parte reale di funzione olomorfa. Per trovarla, si può procedere direttamente, osservando che $x = Re(z)$, $-xy = Re(z^2 i/2)$ e $\log \sqrt{x^2 + y^2} = Re(\mathrm{Log}(z))$. Dunque u è parte reale di

$$f(z) = z + \frac{1}{2} z^2 i + \mathrm{Log}\, z + ia$$

con a costante reale. Tale funzione è olomorfa su ogni aperto contenuto in $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

Un altro metodo per trovare f è quello di trovare una primitiva olomorfa della funzione olomorfa $g = u_x - iu_y = 1 + iz + 1/z$. Si ha

$$g = h' = \left(z + iz^2/2 + \mathrm{Log}(z)\right)'.$$

A meno di costante, h è la funzione cercata.