# Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2018/2019

30 agosto 2019

Lo studente svolga i seguenti esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

**Esercizio 1.** Sia $X$ uno spazio topologico di Hausdorff e sia $Y$ un suo sottoinsieme nonvuoto.

(1a) Si dimostri che, se $Y$ è un retratto di $X$, allora $Y$ è anche chiuso in $X$. Si fornisca inoltre un esempio di spazio topologico $S$ e di retratto $T$ di $S$ tale che $T$ non sia chiuso in $S$.

(1b) Supponiamo che $X$ sia metrizzabile tramite una distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Indichiamo con $\overline{Y}$ la chiusura di $Y$ in $X$. Si dimostri che un punto $x$ di $X$ appartiene a $\overline{Y}$ se e soltanto se $\inf_{y \in Y} d(x,y) = 0$.

(1c) Supponiamo che $Y$ sia costituito da soli due punti. Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $X$ ponendo:

$$x \,\mathcal{R}\, y \ \text{ se e soltanto se } \ x = y \text{ oppure } x \neq y \text{ e } \{x,y\} = Y.$$

Si dimostri che lo spazio topologico quoziente $X/_{\mathcal{R}}$ è di Hausdorff.

(1d) È vero che $Y$ è chiuso in $X$ se e soltanto se $Y \times Y$ è chiuso nel prodotto topologico $X \times X$?

**Esercizio 2.** Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $J$ un suo sottospazio topologico infinito, ovvero $J$ è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ dotato della topologia relativa. Si dimostri che $J$ ammette un sottospazio topologico infinito e totalmente sconnesso.

**Esercizio 3.** Siano $A$ e $B$ i sottospazi topologici del piano euclideo rappresentati in figura.


(3a) Si stabilisca se $A$ e $B$ sono omeomorfi e/o omotopicamente equivalenti.

(3b) Si calcolino i gruppi fondamentali degli spazi $A$ e $B$.

(3c) Sia $X$ lo spazio topologico ottenuto ruotando l'insieme $A$ attorno alla retta $r$ contenuta nel piano. Si calcoli il gruppo fondamentale di $X$.

**Esercizio 4.** (4a) Si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x - 2} dx.$$

(4b) Si consideri la funzione di due variabili reali $u(x, y) = x - xy + \log \sqrt{x^2 + y^2}$, con $(x, y) \neq (0, 0)$. Si trovino tutte le funzioni olomorfe con parte reale $u$.