# Geometria III

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2016/2017
16 gennaio 2018

**Esercizio 1.** Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e sia $X$ il sottospazio topologico di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo $X := S^2 \cup C$, dove:

- $S^2$ è la 2-sfera standard $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
- $C$ è la circonferenza $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ (x-3)^2 + y^2 = 9\}$.

(1a) Si calcolino i gruppi di omologia ridotta $\widetilde{H}_q(X)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$.

(1b) Si calcolino i gruppi $H_q(X, C)$ di omologia relativa per ogni $q \in \mathbb{N}$. Si dica inoltre se $C$ è un retratto di $X$ e/o un retratto di deformazione di $X$.

**Esercizio 2.**

(2a) Sia $X$ uno spazio topologico connesso per archi avente la seguente proprietà: ogni funzione continua $g : S^1 \to X$ è omotopa a una funzione costante. Mostrare che $X$ è semplicemente connesso (cioè ha gruppo fondamentale banale).

(2b) Sia $D$ il disco unitario chiuso di $\mathbb{R}^2$ e $\partial D = S^1$ la sua frontiera. Sia $f : D \to D$ un omeomorfismo. Mostrare che $f(\partial D) = \partial D$.

**Esercizio 3.** Si consideri l'integrale

$$I = \int_\gamma \frac{z^2}{(2z-3)^2} dz$$

con $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ circonferenza percorsa in senso antiorario.

(3a) Si calcoli $I$ utilizzando la formula integrale di Cauchy.

(3b) Calcolare nuovamente $I$ applicando il Teorema dei residui.

**Esercizio 4.**

(4a) Calcolare l'integrale improprio

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{1+x^2}\, dx\,.$$