# Geometria III

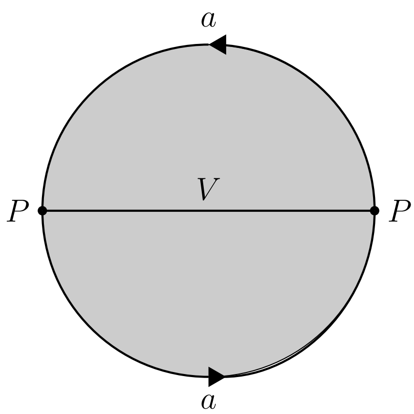
Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2016/2017

29 agosto 2017

Si svolgano i seguenti quattro esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

**Esercizio 1.** Sia $U$ il piano proiettivo ottenuto identificando i punti antipodali del bordo di un disco chiuso $D$ del piano euclideo $\mathbb{R}^2$, e sia $V$ il sottospazio topologico di $U$ ottenuto identificando gli estremi di un diametro di $D$ come in figura.




(1a) Si calcolino i gruppi di omologia relativa $H_q(U,V)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$.

(1b) Si dica, motivando la risposta, se $V$ è un retratto di $U$.

**Esercizio 2.** Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e siano $S^2$, $A$ e $B$ i seguenti sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2=1\},$$
$$A = \{(x,y,z) \ : \ x=y=0, \ -1 \leq z \leq 1\},$$
$$B = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2 \leq 1, \ z=0\}.$$

(2a) Si calcoli il gruppo fondamentale di $S^2 \cup A$.

(2b) Si calcoli il gruppo fondamentale di $S^2 \cup B$ e si dica se $S^2 \cup B$ è omeomorfo a $S^2 \vee S^2$.

**Esercizio 3.** Sia $u(x,y)$ la funzione così definita per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$u(x,y) = x^2 + ky^2 + 1.$$

(3a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione $u$ è la parte reale di una funzione olomorfa.

(3b) Trovare tutte le funzioni olomorfe $f$ tali che $Re(f) = u$.

**Esercizio 4.**

(4a) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \frac{2z-3}{z(z-1)^3} dz$$

con $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ circonferenza percorsa in senso antiorario, applicando il Teorema dei residui.

(4b) Trovare il residuo all'infinito della funzione $f(z) = \frac{2z-3}{z(z-1)^3}$ e applicare il risultato per calcolare nuovamente $I$.