Geometria III

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
6 luglio 2018

Si svolgano i seguenti quattro esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

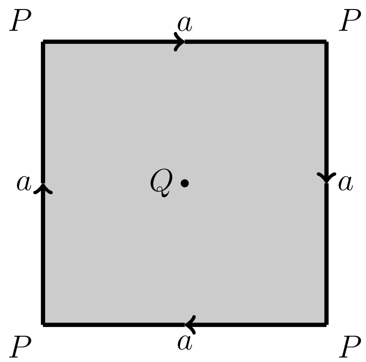
Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e siano $\mathbb{S}^2$, L, N e X i seguenti sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$:

- $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$,
- $L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y=z=0\}$,
- $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x=y=0\}$,
- $X := (\mathbb{S}^2 \cup L) \setminus M$.

(1a) Si calcolino i gruppi di omologia $H_q(X)$ e i gruppi di omologia relativa $H_q(X, \mathbb{S}^2 \setminus M)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$.

(1b) Si dica se X è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio topologico X_4 ottenuto identificando i quattro lati di un quadrato come in figura. I vertici sono tutti identificati nel punto P. Sia Y_4 lo spazio topologico ottenuto da X_4 togliendo un punto Q interno al quadrato. Siano X_5 e Y_5 definiti in modo analogo a partire da un pentagono.



(2a) Si calcolino i gruppi fondamentali di X_4, X_5, Y_4 e Y_5.

(2b) Si stabilisca se tra tali spazi ci sono coppie di spazi omotopicamente equivalenti.

(2c) Si dica se X_4 o X_5 sono omotopicamente equivalenti a una superficie compatta.

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ e sia γ la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorsa in senso antiorario. Si consideri l'integrale di linea

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z+a}{z-a} z^n \, dz.$$

(3a) Mostrare che I vale $2a^{n+1}$ per ogni intero $n \geq 0$.

(3b) Calcolare I per ogni intero $n < 0$.

Esercizio 4. Si consideri la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{\tan z}.$$

(4a) Calcolare il residuo di f nel punto $z = 0$.

(4b) Stabilire se $z = 0$ è una singolarità eliminabile di f.