Note per il corso di Geometria III - Modulo di Analisi complessa 2015-16

1 Serie di potenze

1.1 Convergenza di successioni di funzioni

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e sia $\{f_n(z)\}$, con $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, una successione di funzioni. Dalle disuguaglianze

$$\max\{|\Re\mathrm{e}\,\alpha|, |\Im\mathrm{m}\,\alpha|\} \leq |\alpha| \leq |\Re\mathrm{e}\,\alpha| + |\Im\mathrm{m}\,\alpha| \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{C})$$

segue immediatamente che $f_n(z) \to f(z)$ (cioè $|f_n(z) - f(z)| \to 0$) se e solo se $\Re\mathrm{e}\,(f_n(z)) \to \Re\mathrm{e}\,(f(z))$ e $\Im\mathrm{m}\,(f_n(z)) \to \Im\mathrm{m}\,(f(z))$. Se questo avviene per ogni $z \in \Omega$, si dice che $\{f_n(z)\}$ *converge puntualmente* a f in Ω.

Se $\sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| \to 0$, si dice che $\{f_n(z)\}$ *converge uniformemente* a f in Ω. In particolare, $\{f_n(z)\}$ converge puntualmente a f in Ω.

1.2 Convergenza di serie di funzioni

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$, con $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, una serie di funzioni. Se per ogni $z \in \Omega$ la successione delle somme parziali $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ converge puntualmente a $f(z)$ in Ω, si dice che la serie *converge puntualmente* a f in Ω.

Se la serie (a termini reali non negativi) $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)|$ è convergente per ogni $z \in \Omega$, si dice che la serie *converge assolutamente* in Ω. In particolare, la serie converge puntualmente in Ω: infatti, per il criterio del confronto (con $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)|$), le serie reali

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\Re\mathrm{e}\, f_n(z)| \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |\Im\mathrm{m}\, f_n(z)|$$

sono convergenti, e quindi anche le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \Re\mathrm{e}\, f_n(z)$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \Im\mathrm{m}\, f_n(z)$ convergono, e $s_n(z)$ converge.

Se la successione delle somme parziali $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ converge uniformemente a f in Ω, si dice che la serie *converge uniformemente* a f in Ω. In particolare, la serie converge puntualmente a f in Ω.

Teorema 1 (M-test di Weierstrass). *Siano M_n numeri reali tali che $|f_n(z)| \leq M_n$ per ogni $z \in \Omega$. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ converge, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge assolutamente e uniformemente in Ω.*

Dimostrazione. Per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge assolutamente in Ω. Sia $s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$. Per ogni $z \in \Omega$, si ha

$$|s(z) - s_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

Dato $\epsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k < \epsilon$ per ogni $n \geq N$. Dunque $\{s_n(z)\}$ converge uniformemente a s in Ω. $\square$

Esempio. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n^2$ converge uniformemente sul disco chiuso $\overline{B}_0(1)$.

Esempio (Zeta di Riemann). La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-z\log n}$ converge uniformemente su ogni regione $\{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z \geq s\}$, con $s > 1$. Infatti $|1/n^z| = e^{-x\log n} \leq e^{-s\log n} = n^{-s}$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ converge per $s > 1$.

1.3 Convergenza di serie di potenze

Teorema 2 (Hadamard). *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze e $R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$.*

- *La serie converge assolutamente nel disco $B_{z_0}(R)$ e non converge per $z \notin \overline{B}_{z_0}(R)$.*
- *La serie converge uniformemente su ogni disco chiuso $\overline{B}_{z_0}(r)$, con $r < R$.*

$R \in [0, +\infty]$ *è il* raggio di convergenza *della serie di potenze.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $z_0 = 0$. Se $0 < r < R$, sia t tale che $r < t < R$. Essendo $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < t^{-1}$, esiste N tale che

$$\sqrt[n]{|a_n|} < t^{-1} \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Dunque $|a_n| < t^{-n}$ per ogni $n \geq N$. Se $|z| \leq r$, allora

$$|a_n z^n| < \left(\frac{r}{t}\right)^n \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Per il test di Weierstrass, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge assolutamente e uniformemente in $\overline{B}_0(r)$. Valendo per ogni $r < R$, la serie converge assolutamente sul disco aperto $B_0(R)$.

Se $|z| > R$, si ha $|z|^{-1} < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dunque per ogni N, esiste $n > N$ tale che $|z|^{-1} < \sqrt[n]{|a_n|}$ e quindi esiste una sottosuccessione di $\{a_n z^n\}$ formata da numeri complessi di modulo maggiore di 1 e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ non converge. □

(N.B.: se $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \ell$, allora $c_n \to 0$: $|c_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - \ell| + |\ell - s_{n-1}| \to 0$)

Esempi.

1. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ ha raggio di convergenza 1.
2. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ha raggio di convergenza $+\infty$.
3. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$, con $a_n = 2^n$ se n è primo, $a_n = 0$ altrimenti, ha raggio di convergenza 1/2.
4. Se una serie di potenze *reale* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge su un intervallo di raggio R centrato in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora la serie di potenze *complessa* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - x_0)^n$ converge sul disco $B_{x_0}(R)$ ed estende f ad una funzione $f(z)$ sul disco.