Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

16 gennaio 2018

Lo studente svolga i seguenti tre esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1a) Sia X uno spazio topologico, sia A un sottoinsieme aperto di X e sia D un sottoinsieme denso di X. Si dimostri che $\overline{A} = \overline{A \cap D}$, ove $\overline{A}$ indica la chiusura di A in X e $\overline{A \cap D}$ indica la chiusura di $A \cap D$ in X.

(1b) Sia X uno spazio topologico, sia C un suo sottoinsieme chiuso e sia $\mathrm{Fr}(C)$ la frontiera di C in X. Si dimostri che il sottoinsieme $\mathrm{Fr}(C)$ di X non ha punti interni.

(1c) Sia $\mathbb{S}^1$ la circonferenza standard di $\mathbb{R}^2$ dotata della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{S}^1$ definita come segue:

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ se e soltanto se } y \in \{-x, x\}.$$

Indichiamo con $\mathbb{S}^1/_{\mathcal{R}}$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{S}^1$ modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/_{\mathcal{R}}$ la proiezione naturale al quoziente. Si dimostri che $\mathbb{S}^1/_{\mathcal{R}}$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Si dica inoltre se π è aperta.

SOLUZIONE: (1a) Se $A = \emptyset$ allora $\overline{A} = \emptyset = \overline{A \cap D}$. Supponiamo che $A \neq \emptyset$. Indichiamo con τ la topologia di X. Sia $x \in \overline{A}$. Dobbiamo provare che $x \in \overline{A \cap D}$ o, equivalentemente, che $U \cap (A \cap D) \neq \emptyset$ per ogni $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$. Sia $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$. Possiamo supporre che $U \in \tau$. Poiché $U \in \mathcal{N}_\tau(x) \cap \tau$, $x \in \overline{A}$ e $A \in \tau$, si ha che $U \cap A$ è un aperto non-vuoto di X. La densità di D in X equivale a dire che D ha intersezione non-vuota con ogni aperto non-vuoto di X (perché?). Segue che $U \cap (A \cap D) = (U \cap A) \cap D \neq \emptyset$, come desiderato.

(1b) Supponiamo che esista un punto interno x di $\mathrm{Fr}(C)$ in X, cioé $x \in \mathrm{int}(F(C))$. Poiché C è chiuso in X, si ha che $\mathrm{Fr}(C) \subset \overline{C} = C$ e quindi $\mathrm{int}(F(C)) \subset \mathrm{int}(C)$. D'altra parte per definizione $F(C) \cap \mathrm{int}(C) = \emptyset$, dunque $x \in \mathrm{int}(F(C)) \subset F(C) \cap \mathrm{int}(C) = \emptyset$, che è assurdo.

(1c) Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e consideriamo $\mathbb{S}^1$ come un sottospazio topologico di $\mathbb{C}$. Definiamo l'applicazione continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ponendo $f(z) := z^2$ per ogni $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Tale applicazione è surgettiva e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$. Esiste dunque un'applicazione (unica) continua e bigettiva $g : \mathbb{S}^1/_{\mathcal{R}} = \mathbb{S}^1/_{\mathcal{R}_f} \to \mathbb{S}^1$ tale che $f = g \circ \pi$. Poiché $\mathbb{S}^1/_{\mathcal{R}}$ è compatto e $\mathbb{S}^1$ è T_2, g è anche una applicazione chiusa e quindi un omeomorfismo.

Dimostriamo infine che π è aperta. Si osservi che l'applicazione antipodale $a : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, definita ponendo $a(z) := -z$, è un omeomorfismo con $a^{-1} = a$. Inoltre, per ogni sottoinsieme

A di $\mathbb{S}^1$, la π-saturazione $\pi^{-1}(\pi(A))$ di A coincide con $A \cup a(A)$. Segue che, se A è un aperto di $\mathbb{S}^1$, anche $\pi^{-1}(\pi(A)) = A \cup a(A)$ lo è. Questo prova che π è aperta.

Esercizio 2. Siano B_s e B_d le famiglie di sottoinsiemi della retta reale $\mathbb{R}$ definite ponendo:

$$B_s := \{(a, b] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \quad \text{and} \quad B_d := \{[a, b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Siano j_s e j_d le topologie su $\mathbb{R}$ aventi rispettivamente per basi B_s e B_d. Indichiamo con $(\mathbb{R}^2, \eta)$ il prodotto topologico tra $(\mathbb{R}, j_s)$ e $(\mathbb{R}, j_d)$.

(2a) Si dimostri che η è più fine della topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

(2b) Si dica se $(\mathbb{R}^2, \eta)$ è compatto.

(2c) Si dica se $(\mathbb{R}^2, \eta)$ è connesso.

(2d) Sia $f : (\mathbb{R}^2, \eta) \to (\mathbb{R}, j_d)$ la funzione definita ponendo $f(x, y) := x + y$. Si dimostri che f non è continua.

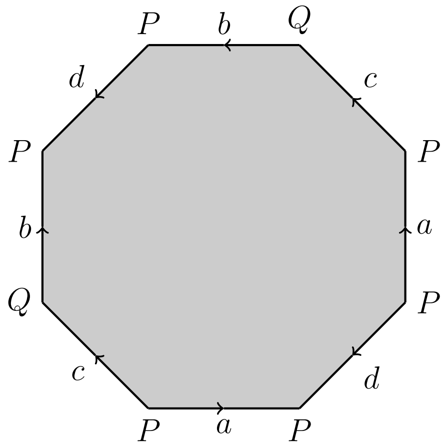
SOLUZIONE: (2a) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$. Si osservi che $(a, b) = \bigcup_{r \in (a,b)} (a, r] = \bigcup_{r \in (a,b)} [r, b)$. Dunque la base $\{(a, b)\}_{a,b \in \mathbb{R}, a<b}$ della topologia euclidea $\tau^1_{\mathcal{E}}$ di $\mathbb{R}$ (e dunque la topologia $\tau^1_{\mathcal{E}}$ stessa) è contenuta in entrambe le topologie j_s e j_d di $\mathbb{R}$. In particolare la topologia euclidea $\tau^2_{\mathcal{E}}$ di $\mathbb{R}^2$ (che è il prodotto topologico di $\tau^1_{\mathcal{E}}$ per se stessa) è contenuta nella topologia η (che è il prodotto topologico di j_s per j_d).

(2b) $(\mathbb{R}^2, \eta)$ non è compatto infatti dal ricoprimento aperto $\{(-n, n] \times [-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1}$ non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito.

(2c) $(-\infty, 0] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n - 1, 0] \in j_s$ e $(0, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0, n + 1] \in j_s$. Dunque $A := (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \in \eta$, $B := (0, +\infty) \times \mathbb{R} \in \eta$, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{R}$. Segue che $(\mathbb{R}^2, \eta)$ non è connesso.

(2d) Sia $[0, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n+1) \in j_d$ e sia $A := f^{-1}([0, +\infty)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \geq 0\}$. È sufficiente provare che A non è un aperto di η. Sia $(0, 0) \in A$. La famiglia $\{(-\epsilon, 0] \times [0, \epsilon)\}_{\epsilon > 0}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un sistema fondamentale di intorni di $(0, 0)$ per η. D'altra parte, per ogni $\epsilon > 0$, $(-\epsilon/2, 0) \in ((-\epsilon, 0] \times [0, \epsilon)) \setminus A$ e quindi $(-\epsilon, 0] \times [0, \epsilon) \not\subset A$. Segue che $(0, 0)$ non è un punto interno di A in η. In particolare A non è aperto in η e quindi f non è continua.

Esercizio 3. Sia S lo spazio topologico ottenuto come quoziente di un ottagono rispetto alle identificazioni indicate nella figura seguente.



(3a) Si dimostri che S è una superficie compatta e la si classifichi.

(3b) Si dica se esistono due numeri naturali g e g' tali che $T_g \sharp S$ è omeomorfo a $T_{g'} \sharp U_4$.

SOLUZIONE: (3a) La procedura di taglio/incolla mostra che S è omeomorfa alla superficie topologica U_3.

(3d) $T_g \sharp S \simeq U_{3+2g}$, $T_{g'} \sharp U_4 \simeq U_{4+2g'}$ e $3 + 2g \neq 4 + 2g'$ per ogni $g, g' \in \mathbb{N}$. Dunque $T_g \sharp S$ e $T_{g'} \sharp U_4$ non sono mai omeomorfe.