Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
11 gennaio 2019

Lo studente svolga i seguenti esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia τ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita ponendo:

$$\tau := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, 0 \not\in A\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, 0 \in A, \mathbb{R} \setminus A \text{ è finito}\}.$$

(1a) Si dimostri che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

(1b) Si dica se la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ definita ponendo $f(x) := \cos(x)$ è continua.

(1c) Si dimostri che $(\mathbb{R}, \tau)$ è totalmente sconnesso, cioè che la componente connessa di ogni punto x di $(\mathbb{R}, \tau)$ è uguale a $\{x\}$.

(1d) Si dica se il sottoinsieme $[0, 1)$ di $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto.

(1e) Sia $(\mathbb{R}^2, \eta)$ il prodotto topologico di $(\mathbb{R}, \tau)$ con se stesso e sia J il segmento $[1, 2] \times \{0\}$ di $\mathbb{R}^2$. Si calcoli la chiusura di J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$.

SOLUZIONE. (1a) $\emptyset \in \tau$ in quanto $0 \not\in \emptyset$ e $\mathbb{R} \in \tau$ in quanto $0 \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ è finito. Sia $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ una famiglia nonvuota di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ appartenenti a τ. Se $0 \not\in A_i$ per ogni $i \in I$ allora $0 \not\in \bigcup_{i\in I} A_i$ e quindi $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$. Se $0 \in A_j$ per qualche $j \in I$ allora $0 \in \bigcup_{i\in I} A_i$ e $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$ è finito in quanto $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in I} A_i \subset \mathbb{R} \setminus A_j$ e $\mathbb{R} \setminus A_j$ è finito. Dunque anche in questo caso $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$. Siano ora A_1 e A_2 due elementi di τ. Se $0 \in A_1 \cap A_2$ allora $\mathbb{R} \setminus A_1$ e $\mathbb{R} \setminus A_2$ sono finiti e quindi anche $\mathbb{R} \setminus (A_1 \cap A_2) = (\mathbb{R} \setminus A_1) \cup (\mathbb{R} \setminus A_2)$ lo è, e quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Se $0 \not\in A_1 \cap A_2$ allora $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

(1b) f non è continua in quanto $\mathbb{R} \setminus \{0\} \in \tau$ ma $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \not\in \tau$ (infatti $0 \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ ma $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ è infinito).

(1c) Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{C}(x)$ la sua componente connessa in $(\mathbb{R}, \tau)$. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{C}(x)$ contenga un punto $y \neq x$. Se $x = 0$ allora $y \neq 0$ e $\mathcal{C}(0) = (\mathcal{C}(0) \cap (\mathbb{R} \setminus \{y\})) \cup \{y\}$, dove $\mathbb{R} \setminus \{y\} \in \tau$ e $\{y\} \in \tau$. Poiché $\mathcal{C}(0) \cap (\mathbb{R} \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ (contiene 0) e $\{y\} \neq \emptyset$, segue che $\mathcal{C}(0)$ non è connesso, da cui l'assurdo. Similmente, se $x \neq 0$ allora $\mathcal{C}(x) = (\mathcal{C}(x) \cap (\mathbb{R} \setminus \{x\})) \cup \{x\}$. Segue che $\mathcal{C}(x)$ non è connesso, da cui l'assurdo.

(1d) Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1)$ in $(\mathbb{R}, \tau)$, ovvero $A_i \in \tau$ per ogni $i \in I$ e $[0, 1) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Esiste dunque $j \in I$ tale che $0 \in A_j$. Poiché $A_j \in \tau$, $\mathbb{R} \setminus A_j$ è finito. In particolare è finita l'intersezione $F := [0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus A_j)$. Se $F = \emptyset$ allora $[0,1) \subset A_j$ e quindi $\{A_j\}$ è un sottoricoprimento finito di $[0,1)$ estratto da $\{A_i\}_{i \in I}$. Se $F \neq \emptyset$ e $x_1, \ldots, x_n$ sono tutti gli elementi di F allora per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ esiste $i_k \in I$ tale che $x_k \in A_{i_k}$. Segue che $\{A_j, A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ è un sottoricoprimento finito di $[0,1)$ estratto da $\{A_i\}_{i \in I}$. Dunque $[0,1)$ è compatto in $(\mathbb{R}, \tau)$.

(1e) Ricordiamo che la chiusura $\overline{J}$ di J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$ coincide con $\overline{[1,2]} \times \overline{\{0\}}$, dove $\overline{[1,2]}$ e $\overline{\{0\}}$ indicano rispettivamente le chiusure di $[1,2]$ e di $\{0\}$ in $(\mathbb{R}, \tau)$. Poiché $\mathbb{R} \setminus \{0\} \in \tau$, si ha che $\{0\}$ è chiuso in $(\mathbb{R}, \tau)$ e quindi $\overline{\{0\}} = \{0\}$. Osserviamo inoltre che, se $x \in \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup [1,2])$, allora $\{x\} \in \tau \cap \mathcal{N}_\tau(x)$ e $\{x\} \cap [1,2] = \emptyset$, dunque x non è aderente a $[1,2]$ in $(\mathbb{R}, \tau)$. Sia ora $U \in \mathcal{N}_\tau(0)$ e sia $A \in \tau$ tale che $0 \in A \subset U$. Esiste dunque un sottoinsieme finito F di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $A = \mathbb{R} \setminus F$. Poiché $[1,2]$ è infinito, segue che $A \cap [1,2] = [1,2] \setminus F \neq \emptyset$. In particolare $U \cap [1,2] \neq \emptyset$ e quindi 0 è aderente a $[1,2]$ in $(\mathbb{R}, \tau)$. Abbiamo così dimostrato che $\overline{[1,2]} = \{0\} \cup [1,2]$. Dunque $\overline{J} = (\{0\} \cup [1,2]) \times \{0\} = \{(0,0)\} \cup J$.

Ecco un altro modo di risolvere il presente esercizio. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia $\mathcal{V}(x)$ il sistema fondamentale di intorni di x in $(\mathbb{R}, \tau)$ definito ponendo $\mathcal{V}(x) := \{A \in \tau \,|\, x \in A\}$. Segue che, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la famiglia $\mathcal{V}^*(x,y) := \{U \times V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \,|\, U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(y)\}$ è un sistema fondamentale di intorni di (x,y) in $(\mathbb{R}^2, \eta)$. Sia $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus J$. Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, allora $\{(x,y)\} \in \mathcal{V}^*(x,y)$ e $\{(x,y)\} \cap J = \emptyset$, dunque (x,y) non è aderente a J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$. Se $x = 0$ e $y \neq 0$ allora $\mathbb{R} \times \{y\} \in \mathcal{V}^*(x,y)$ e $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap J = \emptyset$, dunque (x,y) non è aderente a J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$. Se $x \neq 0$ (e quindi $x \notin \{0\} \cup [1,2]$) e $y = 0$, allora $\{x\} \times \mathbb{R} \in \mathcal{V}^*(x,y)$ e $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap J = \emptyset$, dunque (x,y) non è aderente a J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$. Sia infine $(x,y) = (0,0)$ e sia $U \times V \in \mathcal{V}^*(0,0)$. Allora esistono due sottoinsiemi finiti F e G di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che $U = \mathbb{R} \setminus F$ e $V = \mathbb{R} \setminus G$. Si osservi che $U \times V \supset (\mathbb{R} \setminus F) \times \{0\}$. Poiché $(\mathbb{R} \setminus F) \cap [1,2] = [1,2] \setminus F \neq \emptyset$, segue che $(U \times V) \cap J \supset ([1,2] \setminus F) \times \{0\} \neq \emptyset$ e quindi $(0,0)$ è aderente a J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$. Abbiamo così dimostrato che la chiusura di J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$ è uguale a $\{(0,0)\} \cup J$.

Esercizio 2. Sia X l'intervallo $[-1,1]$ della retta reale $\mathbb{R}$ dotato della topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}$. Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su X ponendo:

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ se e soltanto se } (|x| = |y| \text{ e } |x| < 1) \text{ oppure } (x = y \text{ e } |x| = 1).$$

Indichiamo con $X/_{\mathcal{R}}$ lo spazio topologico quoziente di X modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : X \to X/_{\mathcal{R}}$ l'applicazione di passaggio al quoziente.

(2a) Si dimostri che $X/_{\mathcal{R}}$ è uno spazio topologico T_1 ma non T_2.

(2b) Si costruisca un sottoinsieme non vuoto e compatto di $X/_{\mathcal{R}}$ che non sia chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$.

SOLUZIONE. (2a) Sia $x \in [-1,1]$. Dobbiamo dimostrare che il singoletto $\{\pi(x)\}$ è chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$. Poiché $\pi^{-1}(\pi(x))$ è uguale al chiuso $\{-x, x\}$ di $[-1,1]$ se $x \in [-1,1] \setminus \{-1,0,1\}$ ed è uguale al chiuso $\{x\}$ di $[-1,1]$ se $x \in \{-1,0,1\}$, segue che $X/_{\mathcal{R}}$ è T_1. Supponiamo per assurdo che $X/_{\mathcal{R}}$ sia anche T_2. Siano $\alpha := \pi(-1)$ e $\beta := \pi(1)$ due punti (distinti) di $X/_{\mathcal{R}}$. Siano anche U un intorno aperto di α in $X/_{\mathcal{R}}$ e V un intorno aperto di β in $X/_{\mathcal{R}}$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Segue che $\pi^{-1}(U)$ è un intorno aperto π-saturo di -1 in $[-1,1]$, $\pi^{-1}(V)$ è un intorno aperto π-saturo di 1 in $[-1,1]$ e $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$. Poiché $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(U)$ sono aperti in $[-1,1]$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $[-1, -1+\varepsilon) \subset \pi^{-1}(U)$ e $(1-\varepsilon, 1] \subset \pi^{-1}(V)$. D'altra parte gli insiemi $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(U)$ sono π-saturi e quindi $[-1, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1) \subset \pi^{-1}(U)$ e $(-1, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1] \subset \pi^{-1}(V)$. Segue che

$$(-1, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1) \subset \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset,$$

da cui l'assurdo.

(2b) Il sottoinsieme $\pi([0,1])$ di $X/_{\mathcal{R}}$ è compatto in quanto immagine continua di un compatto, ma non è chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$ in quanto $\pi^{-1}(\pi([0,1])) = (-1,1]$ che non è chiuso in $[-1,1]$ (-1 è aderente a $(-1,1]$ ma non appartiene a $(-1,1]$).

NOTA. L'esistenza di un sottoinsieme compatto non chiuso di $X/_{\mathcal{R}}$, come $\pi([0,1])$, implica che $X/_{\mathcal{R}}$ non è T_2 (infatti, in uno spazio topologico T_2, ogni sottoinsieme compatto è chiuso). Anche in questo modo si poteva dimostrare la seconda parte del precedente punto (2a).

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale euclideo e sia T il sottospazio topologico di $\mathbb{R}^3$ (un *toro solido*) ottenuto ruotando il disco

$$D = \{(x,y,z) \in R^3 \mid (x-2)^2 + z^2 \leq 1,\ y = 0\}$$

attorno all'asse z. Siano P e Q due punti appartenenti alla frontiera di T e sia X lo spazio topologico ottenuto da T identificando P e Q.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

(3b) Si dica se esiste un retratto di deformazione di X omeomorfo a una superficie compatta.

SOLUZIONE. (3a) Lo spazio topologico X è omotopicamente equivalente a un bouquet di due circonferenze. Lo si può vedere, ad esempio, prendendo P e Q su ∂T nel piano $z = 0$, uniti da un arco, poi contrarre un cammino in ∂T tra P e Q e ottenere X come T unito a una circonferenza (che possiamo prendere nel piano $z = 0$) in un punto. La proiezione ortogonale sul piano $z = 0$ mostra che X è omotopicamente equivalente a una corona nel piano unita a una circonferenza in un punto, che a sua volta si retrae (con deformazione) su $S^1 \vee S^1$.

Quindi $\pi(X) \simeq \pi(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(3b) Se esistesse Y retratto di deformazione di X, si avrebbe $\pi(Y) \simeq \pi(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Ma nessuna superficie compatta ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Esercizio 4. (4a) Si consideri l'equazione

$$z^3 + 3z = \frac{1}{2} + \frac{1}{z}.$$

Si determini un disco centrato nell'origine che contenga tutte le soluzioni dell'equazione e si stabilisca quante soluzioni appartengono al disco unitario $|z| < 1$.

(4b) Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4 + \sin x} dx.$$

SOLUZIONE. (4a) Si ha che z è soluzione dell'equazione se e solo se z è radice del polinomio $f(z) = 2z^4 + 6z^2 - z - 2$ (infatti f non si annulla per $z = 0$). Si può quindi applicare il Teorema di Rouché. Applicandolo sul disco $|z| < 2$ alle funzioni f e $g(z) = 2z^4$ si ottiene che f ha 4 radici (con molteplicità) in $|z| < 2$. Applicandolo sul disco $|z| < 1$ alle funzioni f e $g(z) = 6z^2$ si ottiene che f ha 2 radici in $|z| < 1$.

(4b) L'integrale I vale $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$. Si può ottenere osservando che la funzione integranda è restrizione a $|z| = 1$ della funzione

$$\frac{1}{4 + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{2iz}{z^2 + 8iz - 1}.$$

Sia $f(z) = \frac{1}{iz}\frac{2iz}{z^2+8iz-1} = \frac{2}{z^2+8iz-1} = \frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}$. L'unico polo di f nel disco unitario è $z_1 = (\sqrt{15} - 4)i$, con residuo $\frac{2}{(z_1 - z_2)} = -\frac{i}{\sqrt{15}}$. Quindi

$$I = 2\pi i \int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1} f = 2\pi i \left(-\frac{i}{\sqrt{15}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}.$$