Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2023/2024
5 luglio 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3. Sia γ la circonferenza in $\mathbb{R}^3$ definita da $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2+z^2 = 1, y = 0\}$ e sia T il toro ottenuto dalla rotazione di γ attorno all'asse z. Siano A e B i piani dati, rispettivamente, da $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$. Sia X lo spazio topologico $X = T \cup A \cup B$.

(3a) Si mostri che lo spazio topologico $Y := X \setminus \{x = y = 0\}$ ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$.

(3b) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

SOLUZIONE:

(3a) Contraendo la parte esterna dei due piani, quello che otteniamo è un toro unito a quattro dischi interni. Quindi Y è omotopicamente equivalente a un toro unito a quattro dischi. Ora possiamo contrarre anche i quattro dischi e ottenere uno spazio omotopicamente equivalente costituito da 4 sfere unite a due a due in quattro punti oppure a 4 sfere unite due a due da 4 archi a_1, a_2, a_3, a_4. Contraendo 3 di questi archi, si ottiene che Y è omotopicamente equivalente all'unione a un punto di 4 sfere e di una circonferenza: $Y \sim S^2 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^1$.

Lo spazio $Y_1 = S^2 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^2$ è semplicemente connesso (si vede ad esempio con Seifert-Van-Kampen). Applicando Seifert-Van-Kampen a Y, prendendo due intorni aperti $A_1 \sim Y_1$ di Y_1 e $A_2 \sim S^1$ della circonferenza, con intersezione $A_1 \cap A_2 \ni P$ contraibile, si ottiene

$$\pi(Y, P) \simeq \langle \alpha \mid \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z},$$

dove α genera $\pi(A_2, P)$.

(3b) Contraendo la parte esterna dei due piani, si ottiene un toro unito a quattro dischi interni e due segmenti incidenti al suo interno. Sia a una circonferenza sul toro che unisce i quattro punti di intersezione del toro coi due segmenti.

Applichiamo il teorema di Seifert-Van Kampen a X prendendo come aperti U_1 un intorno aperto dell'unione di a con i due segmenti e $U_2 = X \setminus \{p\} \sim Y$ dove p è il punto di intersezione dei due segmenti. $U_1 \sim S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ e $\pi(U_1, p)$ ha generatori $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ corrispondenti a quattro archi su a. L'intersezione dei due aperti $U_1 \cap U_2$ si contrae su $a \simeq S^1$. Abbiamo dunque i seguenti gruppi fondamentali, dato un punto P nell'intersezione $U_1 \cap U_2$:

$$\pi_1(U_1, p) = \langle \beta, \gamma, \delta, \epsilon \mid \varnothing \rangle, \ \pi_1(U_2, p) = \langle \alpha \mid \varnothing \rangle, \ \pi_1(U_1 \cap U_2, p) = \langle \alpha \mid \varnothing \rangle,$$

dove α è la classe di a e $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ L'unica relazione è quella data dall'inclusione del cammino α nei due aperti che è la seguente:

$$i_1^\star(\alpha) = \beta\gamma\delta\epsilon, i_2^\star(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha = \beta\gamma\delta\epsilon;$$

da cui possiamo concludere:

$$\pi_1(X, p) = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \,|\, \alpha = \beta\gamma\delta\epsilon \rangle = \langle \beta, \gamma, \delta, \epsilon \,|\, \varnothing \rangle \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{*4}.$$

Esercizio 4. (4a) Calcolare il seguente integrale lungo la circonferenza unitaria γ di centro l'origine:

$$I = \int_\gamma \frac{\cos(2z)}{z^5} dz.$$

(4b) Si consideri la funzione $f(z) = 2z - 6i$. Si determini il massimo modulo $|f(z)|$ che f assume nel disco chiuso $\{|z| \leq 1\}$.

SOLUZIONE: (4a) Dalla Formula Integrale di Cauchy per le derivate applicato a $f(z) = \cos(2z)$ e $z_0 = 0$, si ha:

$$I = \frac{2\pi i f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{2\pi i (16\cos(2z))_{|z=0}}{24} = \frac{4\pi i}{3}.$$

(4b) Per il Teorema del Massimo Modulo, basta trovare il massimo sul bordo del disco, dove $z = e^{i\theta}$. Si ha

$$|f(e^{i\theta})|^2 = |2(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) - 6i|^2 = 4\cos^2(\theta) + (2\sin(\theta) - 6)^2 = 40 - 24\sin(\theta)$$

che ha massimo quando $\sin(\theta) = -1$ cioè nel punto $z = -i$, dove $f(-i) = -8i$. Dunque il massimo modulo di f è $|f(-i)| = 8$.