Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2023/2024

5 luglio 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti della retta reale $\mathbb{R}$ e sia $\mathcal{B}$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita ponendo

$$\mathcal{B} := \{[a,b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a,b \in \mathbb{R}, 0 \in [a,b)\}.$$

(1a) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia η di $\mathbb{R}$, che non è T_2.

(1b) Si dica se la topologia η di $\mathbb{R}$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

(1c) Si calcoli la chiusura e la frontiera di $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ in $(\mathbb{R}, \eta)$.

(1d) Sia $(\mathbb{R}^2, \eta^2)$ il prodotto topologico di $(\mathbb{R}, \eta)$ con se stesso e sia $f : (\mathbb{R}, \eta) \to (\mathbb{R}^2, \eta^2)$ la funzione definita ponendo $f(x) := (x, x^2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si dimostri che f è continua.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia X il sottospazio topologico $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ di $\mathbb{R}$. Indichiamo con $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su X tale che $[x]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $[x]_{\mathcal{R}} = \{x\}$ altrimenti. Sia $\pi : X \to X/_{\mathcal{R}}$ la mappa di passaggio al quoziente topologico.

(2a) Si dimostri che $X/_{\mathcal{R}}$ è connesso e T_2.

(2b) Si dica se $X/_{\mathcal{R}}$ è compatto. Si dica inoltre se l'applicazione π è aperta.

Esercizio 3. Sia γ la circonferenza in $\mathbb{R}^3$ definita da $\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-2)^2+z^2 = 1, y = 0\}$ e sia T il toro ottenuto dalla rotazione di γ attorno all'asse z. Siano A e B i piani dati, rispettivamente, da $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$. Sia X lo spazio topologico $X = T \cup A \cup B$.

(3a) Si mostri che lo spazio topologico $Y := X \setminus \{x = y = 0\}$ ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$.

(3b) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 4. (4a) Calcolare il seguente integrale lungo la circonferenza unitaria γ di centro l'origine:

$$I = \int_\gamma \frac{\cos(2z)}{z^5} dz.$$

(4b) Si consideri la funzione $f(z) = 2z - 6i$. Si determini il massimo modulo $|f(z)|$ che f assume nel disco chiuso $\{|z| \leq 1\}$.