Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022
10 gennaio 2023

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1a) Sia X uno spazio topologico contenente almeno tre punti. Si dimostri che X è di Hausdorff se e soltanto se X soddisfa la seguente proprietà: assegnati arbitrariamente tre punti distinti x_1, x_2 e x_3 di X, esistono tre aperti U_1, U_2 e U_3 di X tali che $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $x_3 \in U_3$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cap U_3 = \emptyset$ e $U_2 \cap U_3 = \emptyset$.

(1b) Siano Y e Z due spazi topologici compatti e sia $Y \times Z$ il loro prodotto topologico. Supponiamo che, per ogni coppia di sottoinsiemi non-vuoti compatti A e B di $Y \times Z$, si abbia $A \cap B \neq \emptyset$. Si dimostri che Y e Z sono connessi.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ definita ponendo:

$$x\mathcal{R}y \text{ se e soltanto se } |x| = |y|.$$

Indichiamo con $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{R}$ modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathcal{R}$ la proiezione naturale al quoziente topologico.

(2a) Si dica se π è aperta e/o chiusa.

(2b) Si dimostri che $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ è omeomorfo al sottospazio topologico $[0, +\infty)$ di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia S la sfera di raggio uno centrata nell'origine in $\mathbb{R}^3$ e sia X lo spazio ottenuto unendo S con i sei piani tangenti alla sfera e ortogonali agli assi coordinati.

(3a) Si mostri che lo spazio X è omotopicamente equivalente allo spazio $Y = S \cup C$ ottenuto unendo S e la superficie C del cubo di lato 2 centrato nell'origine.

(3b) Si determini il gruppo fondamentale di X.

SOLUZIONE (breve): (a) Ognuno dei sei piani si può retrarre, con deformazione, sulla faccia corrispondente del cubo tangente alla sfera.

(b) Lo spazio Y è omeomorfo all'unione di due sfere con sei punti identificati. A sua volta tale spazio è omotopicamente equivalente all'unione di due sfere con 6 curve (contraibili) che congiungono le coppie di punti fissati sulle due sfere. Quest'ultimo spazio è omotopicamente equivalente al bouquet di 5 cerchi uniti a un punto a due sfere. Essendo la sfera semplicemente connessa, si ottiene

$$\pi(X, x_0) \simeq \pi(Y, y_0) \simeq \pi(S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4. (4a) Si calcoli il residuo in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin^2 z}\,.$$

(4b) (i) Si mostri che l'operatore $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ soddisfa la proprietà del prodotto:

$$\frac{\partial (fg)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} g + f \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\,.$$

(ii) Sia f una funzione di classe C^1 su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, tale che f^2 sia olomorfa in Ω. Usando (i), mostrare che f è olomorfa in Ω.

SOLUZIONE (breve): (a) Si può scrivere, per $z \neq 0$,

$$f(z) = \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 \frac{e^z - 1}{z^2} = \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n! z^2} = \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \cdots\right)$$

La funzione $\frac{z}{\sin z}$ ha una singolarità eliminabile in 0 (esiste il $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$). Dunque $z = 0$ è un polo di f con residuo $Res_0(f) = 1$ (il coefficiente di $1/z$ nello sviluppo di Laurent).

(b) Siano $f = u + iv$, $g = u' + iv'$, con u, v, u', v' funzioni reali. Allora

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x} = \frac{\partial (uu' - vv' + i(uv' + u'v))}{\partial x} = u_x u' + u u'_x - v_x v' - v v'_x + i(u_x v' + u v'_x + u'_x v + u' v_x)$$

e analogamente per $\frac{\partial (fg)}{\partial y}$. Dunque

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial (fg)}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial (fg)}{\partial x} + i\frac{\partial (fg)}{\partial y} = u_x u' + u u'_x - v_x v' - v v'_x + i(u_x v' + u v'_x + u'_x v + u' v_x) + \\
&+ i(u_y u' + u u'_y - v_y v' - v v'_y + i(u_y v' + u v'_y + u'_y v + u' v_y)) = \\
&= (u_x + i v_x + i(u_y + i v_y)(u' + iv') + (u + iv)(u'_x + i v'_x + i(u'_y + i v'_y)) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} g + f \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}
\end{aligned}$$

Da (i) si ottiene, in particolare, che

$$0 = \frac{\partial (f^2)}{\partial \overline{z}} = 2f \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}.$$

Se $f \equiv 0$ su Ω, la tesi è immediata. Se $f \not\equiv 0$ su Ω, anche $f^2 \not\equiv 0$ e quindi gli zeri di f^2, cioè di f, sono isolati. In ogni punto z di Ω dove $f(z) \neq 0$, vale $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, cioè f è olomorfa. Essendo f continua su Ω, gli zeri di f sono singolarità eliminabili, per cui f è olomorfa su tutto Ω.