Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2022/2023
12 gennaio 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia $\tau^1_{\mathcal{E}}$ la topologia euclidea di $\mathbb{R}$, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia η la topologia di $\mathbb{R}$ definita ponendo

$$\eta := \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-a, a) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R},\, a > 0\}.$$

(1a) Si dimostri che η soddisfa il primo assioma di numerabilità.

(1b) Si calcoli la frontiera del singoletto $\{1\}$ in $(\mathbb{R}, \eta)$.

(1c) Si fornisca un esempio di funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g : (\mathbb{R}, \tau^1_{\mathcal{E}}) \to (\mathbb{R}, \eta)$ è continua ma $g : (\mathbb{R}, \tau^1_{\mathcal{E}}) \to (\mathbb{R}, \tau^1_{\mathcal{E}})$ non lo è.

(1d) Sia η^* la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di η con $\tau^1_{\mathcal{E}}$ e sia Q il quadrato di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo
$$Q := [0, 1] \times [0, 1].$$
Si dica se il sottoinsieme Q di $(\mathbb{R}^2, \eta^*)$ è compatto e/o connesso.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano dotato della topologia euclidea e sia $\mathbb{S}^1$ la circonferenza standard $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ di $\mathbb{R}^2$ dotata della topologia relativa indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$. Definiamo il punto P di $\mathbb{S}^1$, il sottoinsieme $\mathbb{S}^1_+$ di $\mathbb{S}^1$ e la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{S}^1$ ponendo

- $P := (0, -1)$,
- $\mathbb{S}^1_+ := \mathbb{S}^1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$,
- $[(x, y)]_{\mathcal{R}} := \{P\} \cup \mathbb{S}^1_+$ se $(x, y) \in \{P\} \cup \mathbb{S}^1_+$ e $[(x, y)]_{\mathcal{R}} := \{(x, y)\}$ altrimenti.

Indichiamo con $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{S}^1$ modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ la proiezione naturale al quoziente topologico.

(2a) Si dimostri che lo spazio topologico $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ è T_2.

(2b) Si dica se π è aperta e/o chiusa.

Esercizio 3. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario chiuso e sia T il toro ottenuto dal quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ identificando i lati opposti. Sia $S^1 = \partial D$ e $f : S^1 \to T$ la funzione definita da

$$f(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = [(0, t)]$$

(la classe di equivalenza di $(0, t)$ in T). Sia $X = (D \cup T)/\sim$ lo spazio topologico ottenuto dall'unione disgiunta di D e T identificando i punti di $S^1 = \partial D$ con le immagini mediante f:

$$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \sim [(0, t)] \quad \text{per ogni } t \in [0, 1].$$

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

(3b) Si dica se X è omotopicamente equivalente a una superficie compatta.

Esercizio 4. (4a) Mostrare che la funzione $f(z) = \frac{1}{6}z^4 - \frac{1}{2}z^2 + z$ ha solo una radice nel disco unitario aperto $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

(4b) Calcolare il seguente integrale usando il teorema dei residui:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{2 + \cos(t)} dt.$$