Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2022/2023
12 giugno 2023

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. (1a) Sia (X, τ) uno spazio topologico. Si dimostri che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

(A) (X, τ) è T_1 ovvero ogni singoletto di X è un chiuso di τ.

(B) Per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, esistono $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e $V \in \mathcal{N}_\tau(y)$ tali che $y \notin U$ e $x \notin V$.

(C) Per ogni $x \in X$, si ha $\bigcap_{U \in \mathcal{N}_\tau(x)} U = \{x\}$.

(1b) Si fornisca, motivando la risposta, un esempio di spazio topologico T_1 che non sia né T_2, né connesso né compatto.

(1c) Sia (X, τ) uno spazio topologico, sia $x \in X$, sia $(X \times X, \xi)$ il prodotto topologico di (X, τ) con se stesso, siano $f : X \to X$ e $g : X \to X$ due applicazioni e sia $F : X \to X \times X$ l'applicazione definita ponendo $F := (f, g)$. Si dimostri che F è continua in x se e soltanto se f e g sono continue in x.

SOLUZIONE (1a) (A) $\Longrightarrow$ (B) È sufficiente porre $U := X \setminus \{y\}$ e $V := X \setminus \{x\}$.

(B) $\Longrightarrow$ (A) Sia $x \in X$. Per ogni $y \in X \setminus \{x\}$, grazie a (B), esiste $V \in \mathcal{N}_\tau(y)$ tale che $x \notin V$ o, equivalentemente, $\{x\} \cap V = \emptyset$. Segue che y non è aderente al singoletto $\{x\}$ in (X, τ). Dunque solo x è aderente a $\{x\}$ in (X, τ), quindi $\{x\}$ è chiuso in (X, τ).

(B) $\Longrightarrow$ (C) Sia $x \in X$. Per ogni $y \in X \setminus \{x\}$, grazie a (A), esiste $U_y \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $y \notin U_y$ o, equivalentemente, $U_y \subset X \setminus \{y\}$. Dunque vale

$$\{x\} \subset \bigcap_{U \in \mathcal{N}_\tau(x)} U \subset \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y \subset \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} (X \setminus \{y\}) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \{y\} = \{x\}$$

da cui $\bigcap_{U \in \mathcal{N}_\tau(x)} U = \{x\}$, come desiderato.

(C) $\Longrightarrow$ (B) Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Poiché $\bigcap_{U \in \mathcal{N}_\tau(x)} U = \{x\}$ e $y \neq x$, esiste almeno un intorno $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $y \notin U$. Poiché $\bigcap_{V \in \mathcal{N}_\tau(y)} V = \{y\}$ e $x \neq y$, esiste almeno un intorno $V \in \mathcal{N}_\tau(y)$ tale che $x \notin V$.

(1b) Siano $\mathbb{R}_1 := \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_2 := \mathbb{R}$ sono due copie di $\mathbb{R}$. È sufficiente definire (X, τ) come l'unione disgiunta tra lo spazio topologico $(\mathbb{R}_1, \tau_{\mathrm{cof}})$, che è compatto, connesso, T_1 e non T_2, e lo spazio topologico $(\mathbb{R}_2, \tau_{\mathcal{E}})$, che è connesso, T_2 e non compatto. Segue che (X, τ) possiede due componenti connesse, è T_1 ma non è né T_2 né compatto.

N.B. $X := \mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2$; $\tau := \{A \sqcup B \in \mathcal{P}(X) \mid A \in \tau_{\mathrm{cof}}, B \in \tau_{\mathcal{E}}\}$, dove τ_{cof} è la topologia cofinita su $\mathbb{R}_1$ e $\tau_{\mathcal{E}}$ è quella euclidea su $\mathbb{R}_2$.

(1c) Siano $\pi_1, \pi_2 : (X \times X, \xi) \to (X, \tau)$ le proiezioni canoniche sul primo e sul secondo fattore. Poiché la continuità puntuale è preservata per composizione, se F è continua in x, lo sono anche $f = \pi_1 \circ F$ e $g = \pi_2 \circ F$.

Supponiamo che f e g siano continue in x e sia $U \in \mathcal{N}_\xi(F(x)) = \mathcal{N}_\xi((f(x), g(x)))$. Dobbiamo dimostrare l'esistenza di un intorno $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $F(V) \subset U$.

Poiché ξ è la topologia prodotto di τ con se stessa, esistono $U_1 \in \mathcal{N}_\tau(f(x))$ e $U_2 \in \mathcal{N}_\tau(g(x))$ tali che $U_1 \times U_2 \subset U$. Per ipotesi, f e g sono continue in x, dunque esistono $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tali che $f(V_1) \subset U_1$ e $g(V_2) \subset U_2$. Definiamo $V := V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_\tau(x)$. Vale: $F(V) \subset f(V) \times g(V) \subset U_1 \times U_2 \subset U$, come desiderato.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ definita ponendo: $x \,\mathcal{R}\, y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Indichiamo con $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathcal{R}$ la proiezione naturale al quoziente topologico.

(2a) Si dimostri che $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ è uno spazio topologico banale.

(2b) Si dica se π è aperta e/o chiusa.

SOLUZIONE (2a) Sia A un aperto π-saturo non-vuoto di $\mathbb{R}$. È sufficiente dimostrare che $A = \mathbb{R}$. Infatti, se ciò fosse vero, l'unico aperto non-vuoto di $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ sarebbe $\pi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\mathcal{R}$ ovvero la topologia di $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ sarebbe quella banale, come desiderato. Sia (a, b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ (con $a < b$) contenuto in A e sia $x \in \mathbb{R}$. Poiché $(a - x, b - x)$ è un aperto non-vuoto di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, l'intersezione $(a - x, b - x) \cap \mathbb{Q}$ è non-vuota. Scegliamo un punto y in $(a - x, b - x) \cap \mathbb{Q}$. Poiché $x + y \in (a, b) \subset A$ e A è π-saturo, si ha che $[x + y]_\mathcal{R} \subset A$. Dunque, $x \in [x]_\mathcal{R} = [x + y]_\mathcal{R} \subset A$. Per l'arbitrarietà di $x \in \mathbb{R}$, segue che $A = \mathbb{R}$.

(2b) Dal punto precedente segue subito che π è aperta. Il singoletto $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ ma la sua π-saturazione $\pi^{-1}(\pi(\{0\})) = \mathbb{Q}$ non lo è. Dunque π non è chiusa.

Esercizio 3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ considerate gli insiemi

$$\begin{aligned} \gamma &= \big\{(x, y, z) \,:\, (x - 2)^2 + y^2 = 1,\ z = 0\big\}\,, \\ L &= \big\{(x, y, z) \,:\, y = z = 0,\ -1 \le x \le 1\big\}, \\ S &= \big\{(x, y, z) \,:\, z = 0,\ x \ge 1\big\}. \end{aligned}$$

Sia poi T lo spazio ottenuto dalla rotazione di γ attorno all'asse y. Calcolare

(3a) il gruppo fondamentale di $X := T \cup L$;

(3b) il gruppo fondamentale di $Y := T \cup L \cup S$.

SOLUZIONE (3a) Un primo metodo per il calcolo di $\pi(X, x_0)$ usa il Teorema di Seifert-Van Kampen: prendendo come U_1 un intorno aperto di T e come U_2 un intorno aperto della copia di S^1 ottenuta unendo L con una semicirconferenza interna del toro T, si ottiene, per $x_0 \in U_1 \cap U_2$,

$$\pi(U_1, x_0) \simeq \langle \alpha, \beta \,|\, \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle, \quad \pi(U_2, x_0) \simeq \langle \gamma \,|\, \emptyset \rangle$$

mentre l'intersezione $U_1 \cap U_2$ è omotopicamente equivalente a L e quindi contraibile, da cui

$$\pi(X, x_0) \simeq \langle \alpha, \beta, \gamma \,|\, \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z} = \pi(T \vee S^1, P).$$

Un metodo alternativo usa i CW-complessi e l'equivalenza omotopica: unendo L con una semicirconferenza interna del toro T e contraendo la semicirconferenza, si ottiene che X è omotopicamente equivalente all'unione a un punto del toro T con una circonferenza.

(3b) Applicando il Teorema di Seifert-Van Kampen: ad esempio si prenda come U_1 un intorno aperto di $X = T \cup L$ e come U_2 un intorno aperto del disco ottenuto contraendo il semipiano alla sua parte interna al toro. L'intersezione $U_1 \cap U_2$ si retrae (con deformazione) su una circonferenza del toro, corrispondente ad uno dei generatori, ad esempio β, del gruppo del toro.

$$\pi(U_1, x_0) \simeq \langle \alpha, \beta, \gamma \,|\, \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}, \quad \pi(U_2, x_0) \simeq \langle \emptyset \,|\, \emptyset \rangle.$$

Quindi

$$\pi(Y, x_0) \simeq \langle \alpha, \beta, \gamma \,|\, \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1,\ \beta = 1 \rangle \simeq \langle \alpha, \gamma \,|\, \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

poiché $i_{1*}(\beta) = \beta$ e $i_{2*}(\beta) = 1$.

Un metodo alternativo usa i CW-complessi e l'equivalenza omotopica: contraendo il disco interno al toro, si ottiene uno spazio topologico che è omotopicamente equivalente all'unione di una sfera con un segmento. Si ottiene quindi che Y è omotopicamente equivalente all'unione a un punto della sfera s^2 con due circonferenze:

$$\pi(Y, x_0) \simeq \pi(S^2 \vee S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4. (4a) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x, y) = kx^2 + y^2$$

è parte reale di una funzione olomorfa f. Trovare tali funzioni f.

(4b) Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos(2x)}{x^2 - 4x + 5} dx\,.$$

SOLUZIONE (4a) Condizione necessaria affinché u sia parte reale di una funzione olomorfa è l'armonicità di u:

$$\Delta u = u_{xx} + uyy = 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Inoltre, l'armonica coniugata v deve soddisfare le Cauchy-Riemann:

$$2kx = -2x = u_x = v_y,\ 2y = u_y = -v_x$$

Per ispezione diretta, le soluzioni di $v_x = -2y, v_y = -2x$ sono $v(x, y) = -2xy + c$, $c \in \mathbb{R}$. Dunque le funzioni olomorfe cercate sono $f(x, y) = -x^2 + y^2 - 2ixy + ic = -z^2 + ic$, con c reale.

(4b) Sia $f(z) = \frac{z-2}{z^2-4z+5}$. Si ha $I = Re(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2iz}dx)$. Inoltre vale la stima

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|} \left| \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1} + 5z^{-2}} \right| \leq \frac{K}{|z|}$$

per $|z| \geq M$, con $M > 0$ sufficientemente grande e $K > 0$. Quindi, dal teorema dei residui,

$$I = Re\left(2\pi i \sum_i Res_{z_i}(f(z)e^{2iz})\right)$$

dove la somma è fatta sui poli di f che stanno nel semipiano superiore (aperto). Essendo $f(z) = (z - 2 - i)(z - 2 + i)$, l'unico residuo da calcolare è

$$Res_{2+i}(f(z)e^{2iz}) = \frac{e^{-2+4i}}{2}.$$

Quindi $I = Re\big(2\pi i \frac{e^{-2}(\cos(4)+i\sin(4))}{2}\big) = -\frac{\pi}{e^2}\sin(4)$.