Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2022/2023

12 giugno 2023

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. (1a) Sia (X, τ) uno spazio topologico. Si dimostri che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

(A) (X, τ) è T_1 ovvero ogni singoletto di X è un chiuso di τ.

(B) Per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, esistono $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e $V \in \mathcal{N}_\tau(y)$ tali che $y \notin U$ e $x \notin V$.

(C) Per ogni $x \in X$, si ha $\bigcap_{U \in \mathcal{N}_\tau(x)} U = \{x\}$.

(1b) Si fornisca, motivando la risposta, un esempio di spazio topologico T_1 che non sia né T_2, né connesso né compatto.

(1c) Sia (X, τ) uno spazio topologico, sia $x \in X$, sia $(X \times X, \xi)$ il prodotto topologico di (X, τ) con se stesso, siano $f : X \to X$ e $g : X \to X$ due applicazioni e sia $F : X \to X \times X$ l'applicazione definita ponendo $F := (f, g)$. Si dimostri che F è continua in x se e soltanto se f e g sono continue in x.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ definita ponendo: $x \, \mathcal{R} \, y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Indichiamo con $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathcal{R}$ la proiezione naturale al quoziente topologico.

(2a) Si dimostri che $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ è uno spazio topologico banale.

(2b) Si dica se π è aperta e/o chiusa.

Esercizio 3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ considerate gli insiemi

$$\gamma = \left\{(x, y, z) \,:\, (x-2)^2 + y^2 = 1,\, z = 0\right\},$$
$$L = \left\{(x, y, z) \,:\, y = z = 0,\, -1 \leq x \leq 1\right\},$$
$$S = \left\{(x, y, z) \,:\, z = 0,\, x \geq 1\right\}.$$

Sia poi T lo spazio ottenuto dalla rotazione di γ attorno all'asse y. Calcolare

(3a) il gruppo fondamentale di $X := T \cup L$;

(3b) il gruppo fondamentale di $Y := T \cup L \cup S$.

Esercizio 4. (4a) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = kx^2 + y^2$$

è parte reale di una funzione olomorfa f. Trovare tali funzioni f.

(4b) Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos(2x)}{x^2-4x+5} dx \,.$$