Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2023/2024
14 giugno 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3. Sia $X = S^2 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ lo spazio topologico ottenuto dalla sfera S^2 togliendo 3 dischi chiusi disgiunti e sia $Y = T \setminus D$ lo spazio ottenuto dal toro T togliendo un disco chiuso.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X mediante il Teorema di Seifert-Van Kampen.

(3b) Si mostri che X e Y hanno gruppi fondamentali isomorfi.

SOLUZIONE:

(3a) Applichiamo Seifert-Van Kampen con U_1 un disco (topologico) aperto su S^2 che contiene i 3 dischi D_1, D_2, D_3 e $U_2 \simeq S^2 \setminus U_1$ un intorno aperto del disco $S^2 \setminus U_1$. U_2 è contraibile, mentre U_1 è omeomorfo a un disco aperto del piano a cui sono tolti 3 dischi chiusi, che è omotopicamente equivalente a un bouquet di 3 circonferenze: $U_1 \sim S^1 \vee S^1 \vee S^1$. Inoltre $U_1 \cap U_2 \sim S^1$, per cui, se $P \in U_1 \cap U_2$,

$$\pi(U_1, P) = \langle \alpha, \beta, \gamma \,|\, \emptyset \rangle, \quad \pi(U_2, P) = \langle \emptyset \,|\, \emptyset \rangle, \quad \pi(U_1 \cap U_2, P) = \langle \delta \,|\, \emptyset \rangle,$$

con $i_{1*}(\delta) = \alpha\beta\gamma$ e $i_{2*}(\delta) = 1$, da cui ($\gamma = (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$)

$$\pi(X, P) = \langle \alpha, \beta, \gamma \,|\, \alpha\beta\gamma = 1 \rangle \simeq \langle \alpha, \beta \,|\, \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

(3b) $Y = T \setminus D$ si retrae con deformazione sul bordo del quadrato con lati identificati, che è omeomorfo al bouquet $S^1 \vee S^1$. Quindi $\pi(Y, P) \simeq \pi(S^1 \vee S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \pi(X, P)$.

Esercizio 4. (4a) Calcolare il seguente integrale applicando il Teorema dei residui:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{3 + \sin t} dt.$$

(4b) Siano $f(z) = 3e^z - z$ e $h(z) = e^z - 3z$. Mostrare che f non ha zeri nel disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, mentre h ha esattamente uno zero in D.

Mostrare che gli zeri di $f(z) = 3e^z - z$ sono tutti non reali, e sono coppie di numeri complessi coniugati.

SOLUZIONE:

(4a) Per applicare il Teorema dei Residui all'integrale I ci sono due modi: nel primo si sostituisce a $\sin t$ l'espressione $(e^{it} - e^{-it})/(2i)$ e a $\cos(2t)$ l'espressione $(e^{2it} + e^{-2it})/2$ (sulla circonferenza unitaria γ vale $z = e^{it}$) e si calcolano i residui nei poli interni al disco unitario della funzione che si ottiene divisa per iz.

Nel secondo modo si osserva che $\cos(2t) = Re(e^{2ti}) = Re(z^2)$ su γ. Quindi I si ottiene prendendo la parte reale del prodotto di $2\pi i$ per la somma dei residui della funzione

$$f(z) = \frac{1}{iz}\frac{z^2}{3 + \frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{2z^2}{z^2 + 6iz - 1} = \frac{2z^2}{(z-a_1)(z-a_2)},$$

con $a_1 = (-3+2\sqrt{2})i$, $a_2 = (-3-2\sqrt{2})i$. L'unico polo di f nel disco unitario è a_1, con residuo

$$Res_{a_1}(f) = \frac{2a_1^2}{a_1 - a_2} = \frac{-2(17-12\sqrt{2})}{4\sqrt{2}i}.$$

Dunque

$$I = Re\left(2\pi i\frac{-2(17-12\sqrt{2})}{4\sqrt{2}i}\right) = Re\left(\pi\frac{-(17-12\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right) = \pi(12 - \tfrac{17}{\sqrt{2}}).$$

(il secondo metodo semplifica il calcolo del residuo)

(4b) Si applica il Teorema di Rouché a $f(z) = 3e^z - z$ e a $g(z) = 3e^z$. Sulla circonferenza unitaria si ha

$$|f-g| = |z| = 1 < 3e^{-1} \leq 3e^x = |3e^z| = |g|$$

e dunque f (come g) non si annulla nel disco unitario (chiuso).

Applicando il Teorema di Rouché a $h(z) = e^z - 3z$ e a $u(z) = -3z$ sulla circonferenza unitaria si ha

$$|h-u| = |e^z| = e^x \leq e < 3 = |u|$$

e dunque h ha (come u) un unico zero nel disco unitario.

La funzione f non ha zeri reali, poiché $3e^x - x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre si ha $\overline{f(z)} = \overline{3e^z - z} = 3e^{\bar{z}} - \bar{z}$. Quindi $f(z) = 0$ se e solo se $f(\bar{z}) = 0$. Dunque gli zeri di f sono coppie di numeri complessi coniugati.