Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2023/2024

14 giugno 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia $X := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Per ogni $n \in X$, definiamo

$$D_n := \{m \in X \,|\, m \text{ è un divisore di } n\}.$$

Denotiamo con $\mathcal{D}$ la famiglia $\{D_n \in \mathcal{P}(X) \,|\, n \in X\}$ di sottoinsiemi di X.

(1a) Si dimostri che $\mathcal{D}$ è la base di una topologia η su X, che non soddisfa la condizione di Hausdorff.

(1b) Si dica se la topologia η su X soddisfa il primo assioma di numerabilità.

(1c) Si dica se (X, η) è connesso e/o compatto.

(1d) Sia (X^2, η^2) il prodotto topologico di (X, η) con se stesso, sia $\tau_{\mathcal{E}}$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$ e sia $f : (X^2, \eta^2) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}})$ la funzione definita ponendo $f(n, m) := n + m$ per ogni $n, m \in X$. Si dimostri che f non è continua.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano dotato della topologia euclidea, sia $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza standard di $\mathbb{R}^2$ e sia $N := (0, 1)$ il polo nord di $\mathbb{S}^1$. Indichiamo con Y il sottoinsieme $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ di $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia relativa indotta da $\mathbb{R}^2$. Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su Y ponendo

$$\begin{aligned} [(x, y)]_{\mathcal{R}} &:= \{(x, y)\} && \text{se } (x, y) \in \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0)\}, \\ [(x, y)]_{\mathcal{R}} &:= \{(x, y), (x, -y)\} && \text{se } (x, y) \in Y \setminus \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0)\}. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\pi : Y \to Y/_{\mathcal{R}}$ la mappa di passaggio al quoziente topologico.

(2a) Si dimostri che $Y/_{\mathcal{R}}$ è omeomorfo all'intervallo $[-1, 1]$ dotato della topologia relativa indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}$.

(2b) Si dica se l'applicazione π è chiusa.

Esercizio 3. Sia $X = S^2 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ lo spazio topologico ottenuto dalla sfera S^2 togliendo 3 dischi chiusi disgiunti e sia $Y = T \setminus D$ lo spazio ottenuto dal toro T togliendo un disco chiuso.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X mediante il Teorema di Seifert-Van Kampen.

(3b) Si mostri che X e Y hanno gruppi fondamentali isomorfi.

Esercizio 4. (4a) Calcolare il seguente integrale applicando il Teorema dei residui:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{3 + \sin t} dt.$$

(4b) Siano $f(z) = 3e^z - z$ e $h(z) = e^z - 3z$. Mostrare che f non ha zeri nel disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, mentre h ha esattamente uno zero in D.

Mostrare che gli zeri di $f(z) = 3e^z - z$ sono tutti non reali, e sono coppie di numeri complessi coniugati.