Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022

20 giugno 2022

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico e sia Y un suo sottoinsieme nonvuoto. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1a) Denotiamo con $\mathrm{Fr}(Y)$ la frontiera di Y in X. Si dimostri che se Y è chiuso in X allora il complementare di $\mathrm{Fr}(Y)$ in X è un sottoinsieme aperto e denso di X. Questa affermazione rimane vera se si omette l'ipotesi 'Y è chiuso in X'?

(1b) Dotiamo Y della topologia relativa indotta da X. Sia y un punto di Y, sia $C(Y,y)$ la componente connessa di y in Y e sia $C(X,y)$ la componente connessa di y in X. Si dimostri che $C(Y,y) \subset C(X,y)$.

Si costruisca inoltre uno spazio topologico sconnesso X, un sottoinsieme nonvuoto Y di X, un punto y di Y ed una topologia su Y (diversa da quella relativa indotta da X) in modo che $C(Y,y) \not\subset C(X,y)$.

(1c) Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su X tale che $[x]_{\mathcal{R}} = Y$ se $x \in Y$ e $[x]_{\mathcal{R}} = \{x\}$ se $x \in X \setminus Y$. Indichiamo con $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proiezione naturale di passaggio al quoziente topologico. Si dimostri che se Y è aperto in X allora π è una applicazione aperta.

SOLUZIONE (1a) Ricordiamo che $\mathrm{Fr}(Y) = \overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$, dove $\overline{Y}$ e $\overline{X \setminus Y}$ denotano rispettivamente le chiusure di Y e $X \setminus Y$ in X. Segue che $\mathrm{Fr}(Y)$ è un chiuso di X (in quanto intersezione di chiusi) e quindi $X \setminus \mathrm{Fr}(Y)$ è un aperto di X. Inoltre, essendo Y chiuso in X per ipotesi, vale $\mathrm{Fr}(Y) \subset \overline{Y} = Y$ e quindi $X \setminus \mathrm{Fr}(Y) \supset X \setminus Y$. Supponiamo per assurdo che $X \setminus \mathrm{Fr}(Y)$ non sia denso in X ovvero che esista $x \in \mathrm{Fr}(Y)$ e un intorno aperto U di x in X tale che $U \cap (X \setminus \mathrm{Fr}(Y)) = \varnothing$. Poiché $X \setminus \mathrm{Fr}(Y) \supset X \setminus Y$, segue che $U \cap (X \setminus Y) = \varnothing$ e quindi x non è aderente a $X \setminus Y$ in X ovvero $x \notin \overline{X \setminus Y}$. Poiché $\mathrm{Fr}(Y) \subset \overline{X \setminus Y}$, segue che $x \notin \mathrm{Fr}(Y)$, che è assurdo.

Se non si assume che Y sia chiuso in X l'affermazione è falsa. Basta prendere uno spazio topologico banale $X = \{a, b\}$ con due punti, $Y := \{a\}$ ed osservare che $\mathrm{Fr}(Y) = X$. Alternativamente, possiamo definire X come la retta reale con topologia euclidea, $Y := \mathbb{Q}$ ed osservare che anche in questo caso $\mathrm{Fr}(Y) = X$.

(1b) Sia τ la topologia di X e sia $\tau|_Y$ la topologia relativa su Y indotta da τ. Ricordiamo che $C(Y,y)$ è un sottoinsieme connesso di Y ovvero il sottospazio topologico $(C(Y,y), (\tau|_Y)|_{C(Y,y)})$ di $(Y, \tau|_Y)$ è connesso. D'altra parte la topologia relativa della topologia relativa coincide con la topologia relativa. Dunque $(\tau|_Y)|_{C(Y,y)} = \tau|_{C(Y,y)}$. Segue che $C(Y,y)$ è anche un sottoinsieme connesso di (X,τ). Inoltre $C(Y,y)$ contiene y. Essendo $C(X,y)$ il più grande sottoinsieme connesso di (X,τ) contenente y, vale $C(Y,y) \subset C(X,y)$ come desiderato.

Supponiamo che $X = Y$ sia un insieme formato da due punti y e z. Dotiamo X della topologia discreta e Y di quella banale. Segue che X ha due componenti connesse date da $\{x\}$ e $\{y\} = C(X,y)$, mentre $Y = C(Y,y)$ è connesso. Dunque $C(Y,y) = Y = \{y,z\} \not\subset \{y\} = C(X,y)$.

(1c) Sia τ la topologia di X e sia $A \in \tau$. Definiamo l'aperto A_Y di X ponendo $A_Y := Y$ se $A \cap Y \neq \varnothing$ e $A_Y := \varnothing$ se $A \cap Y = \varnothing$. Poiché $\pi^{-1}(\pi(A)) = A \cup A_Y \in \tau$, l'insieme $\pi(A)$ è un aperto di $X/\mathcal{R}$. Dunque π è aperta.

Esercizio 2. Uno spazio topologico (X,τ) è detto *localmente compatto* se ogni suo punto possiede un intorno compatto in (X,τ) ovvero se, per ogni $x \in X$, esiste un intorno U_x di x in (X,τ) tale che U_x sia anche un sottoinsieme compatto di (X,τ) (dunque U_x è un intorno compatto di x in (X,τ)).

Sia X uno spazio topologico localmente compatto e sia K un sottoinsieme compatto di X. Si dimostri che K possiede un intorno compatto in (X,τ).

SOLUZIONE Per ogni $x \in X$, sia U_x un intorno compatto di x in X e sia $\mathrm{int}(U_x)$ la sua parte interna in X (che è un intorno aperto di x in X). Poichè $\{\mathrm{int}(U_x)\}_{x\in K}$ è un ricoprimento aperto del compatto K in X, esiste un numero finito di punti $x_1 \ldots, x_n$ di K tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{int}(U_{x_i})$.

Definiamo $U := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ e osserviamo che U è un compatto di X in quanto unione finita di compatti. Infatti se $\{V_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento aperto di U in X e, per ogni $i \in \{1,\ldots,n\}$, J_i è un sottoinsieme finito di J tale che $U_{x_i} \subset \bigcup_{j\in J_i} V_j$ (che esiste per la compattezza di U_{x_i}), allora anche $J' := \bigcup_{i=1}^n J_i$ è un sottoinsieme finito di J e $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \subset \bigcup_{j\in J'} V_j$. Dunque U è compatto in X.

Concludiamo osservando che U è anche un intorno di K in X in quanto U contiene l'aperto $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{int}(U_{x_i})$ che contiene K.

Esercizio 3. Siano C_1 e C_2 le circonferenze nel piano $y = 0$ definite da

$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x-3)^2 + z^2 = 1\}$$

$$C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x-3)^2 + (z-2)^2 = 1\}$$

e sia X lo spazio topologico ottenuto ruotando l'insieme $C_1 \cup C_2$ attorno all'asse z.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X e il suo abelianizzato.

(3b) Si mostri che X non è omeomorfo a una superficie topologica compatta.

SOLUZIONE (3a) Si osservi che X è l'unione di due tori T_1 e T_2 tangenti lungo una circonferenza esterna C''. Applicando Seifert-Van Kampen agli aperti $U_1 \sim T_1$ e $U_2 \sim T_2$ ottenuti unendo ai due tori un intorno aperto (in X) di C'' in modo che $C'' \sim U_1 \cap U_2$, si ottiene:

$$\pi(U_1,P) = \langle \alpha,\beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1\rangle,\ \pi(U_2,P) = \langle \gamma,\delta \mid \gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} = 1\rangle,\ \pi(U_1\cap U_2,P) = \langle \epsilon \mid \emptyset\rangle,$$

con $P \in C''$ e con i generatori β e δ corrispondenti alla circonferenza C''. Si ha dunque $i_{1*}(\epsilon) = \beta$, $i_{2*}(\epsilon) = \delta$ e quindi

$$\begin{aligned}\pi(X, x_0) &= \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1,\ \gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} = 1,\ \beta = \delta \rangle \\ &\simeq \langle \alpha, \beta, \gamma \mid [\alpha, \beta] = 1,\ [\gamma, \beta] = 1 \rangle \\ &\simeq \langle \alpha, \gamma \mid \emptyset \rangle \times \langle \beta \mid \emptyset \rangle \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Lo stesso risultato si può ottenere osservando che X è omeomorfo al prodotto topologico di $S^1 \vee S^1$ con S^1, da cui si può ricavare che $\pi(X, x_0) \simeq \pi(S^1 \vee S^1, x_1) \times \pi(S^1, x_2) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$.

Si ha $Ab(\pi(X, x_0)) = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid [\alpha, \beta] = 1,\ [\gamma, \beta] = 1,\ [\alpha, \beta] = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3$.

(3b) Nessuna superficie compatta ha gruppo fondamentale isomorfo a $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$, per cui X non è omeomorfa (né omotopicamente equivalente) a una superficie compatta (si possono anche confrontare gli abelianizzati e concludere allo stesso modo).

Esercizio 4. (4a) Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ due serie di potenze complesse, con raggi di convergenza R_1 e R_2 rispettivamente. Cosa si può dire del raggio di convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n \ ?$$

(4b) Si trovi il residuo nel punto $z_0 = i$ della funzione $f(z) = 1/(z^4 - 1)$. Si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 - 1} dz$$

lungo la circonferenza γ di raggio $1/2$ centrata in i.

SOLUZIONE (4a) Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Dunque $f \in \mathcal{O}(B_0(R_1))$ e $g \in \mathcal{O}(B_0(R_2))$. Dunque $f + g = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ è olomorfa nel disco aperto $B_0(R)$, con $R = \min\{R_1, R_2\}$, e quindi la sua serie centrata in 0 ha raggio di convergenza maggiore o uguale a $\min\{R_1, R_2\}$.

Dalla definizione del raggio di convergenza, essendo $\limsup_n (\alpha_n \beta_n) \le (\limsup_n \alpha_n)(\limsup_n \beta_n)$ per ogni successione $\alpha_n \ge 0$, $\beta_n \ge 0$, si ha, prendendo i reciproci, che il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n$ è almeno uguale al prodotto $R_1 R_2$.

(4b) Si ha $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$. Dunque

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{z - i} \, \frac{1}{(z - 1)(z + 1)(z + i)}$$

ha un polo semplice in $z = i$, con $Res_i(f) = \frac{1}{(i-1)(i+1)(i+i)} = -\frac{1}{4i}$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 - 1} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{4i} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$