Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022

20 giugno 2022

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico e sia Y un suo sottoinsieme nonvuoto. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1a) Denotiamo con $\mathrm{Fr}(Y)$ la frontiera di Y in X. Si dimostri che se Y è chiuso in X allora il complementare di $\mathrm{Fr}(Y)$ in X è un sottoinsieme aperto e denso di X. Questa affermazione rimane vera se si omette l'ipotesi 'Y è chiuso in X'?

(1b) Dotiamo Y della topologia relativa indotta da X. Sia y un punto di Y, sia $C(Y, y)$ la componente connessa di y in Y e sia $C(X, y)$ la componente connessa di y in X. Si dimostri che $C(Y, y) \subset C(X, y)$.

Si costruisca inoltre uno spazio topologico sconnesso X, un sottoinsieme nonvuoto Y di X, un punto y di Y ed una topologia su Y (diversa da quella relativa indotta da X) in modo che $C(Y, y) \not\subset C(X, y)$.

(1c) Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su X tale che $[x]_{\mathcal{R}} = Y$ se $x \in Y$ e $[x]_{\mathcal{R}} = \{x\}$ se $x \in X \setminus Y$. Indichiamo con $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proiezione naturale di passaggio al quoziente topologico. Si dimostri che se Y è aperto in X allora π è una applicazione aperta.

Esercizio 2. Uno spazio topologico (X, τ) è detto *localmente compatto* se ogni suo punto possiede un intorno compatto in (X, τ) ovvero se, per ogni $x \in X$, esiste un intorno U_x di x in (X, τ) tale che U_x sia anche un sottoinsieme compatto di (X, τ) (dunque U_x è un intorno compatto di x in (X, τ)).

Sia X uno spazio topologico localmente compatto e sia K un sottoinsieme compatto di X. Si dimostri che K possiede un intorno compatto in (X, τ).

Esercizio 3. Siano C_1 e C_2 le circonferenze nel piano $y = 0$ definite da

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x - 3)^2 + z^2 = 1\}$$

$$C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x - 3)^2 + (z - 2)^2 = 1\}$$

e sia X lo spazio topologico ottenuto ruotando l'insieme $C_1 \cup C_2$ attorno all'asse z.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X e il suo abelianizzato.

(3b) Si mostri che X non è omeomorfo a una superficie topologica compatta.

Esercizio 4. (4a) Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ due serie di potenze complesse, con raggi di convergenza R_1 e R_2 rispettivamente. Cosa si può dire del raggio di convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n \ ?$$

(4b) Si trovi il residuo nel punto $z_0 = i$ della funzione $f(z) = 1/(z^4 - 1)$. Si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 - 1} dz$$

lungo la circonferenza γ di raggio $1/2$ centrata in i.