Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2023/2024
26 agosto 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3. Sia T il toro ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z della circonferenza

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y-2)^2 + z^2 = 1, x = 0\}.$$

Siano D_1 e D_2 i dischi chiusi definiti da

$$D_1 = \{y = 0, (x-2)^2 + z^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad D_2 = \{y = 0, (x+2)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Sia X lo spazio topologico $X = T \cup D_1 \cup D_2$.

(3a) Si mostri che lo spazio $X \setminus C$ è semplicemente connesso.

(3b) Si calcoli il gruppo fondamentale di $Y := X \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, y = z = 0\}$.

SOLUZIONE: (3a) Come prima cosa notiamo che lo spazio topologico X è dato da un toro con due dischi chiusi all'interno. Rimuovendo la circonferenza di rotazione C e contraendo poi D_1 e D_2 a due punti lo spazio risultante è omotopicamente equivalente ad una sfera con due dischi tangenti e risulta quindi semplicemente connesso dato che è il wedge di tre spazi semplicemente connessi.
(3b) Lo spazio Y risulta nello spazio di partenza X con unito un diametro della circonferenza interna del toro. Come prima contraiamo i dischi e poi sviluppiamo il CW–complesso relativo allo spazio Y. La descrizione minima è data dalle 2 0–celle ottenute dalla contrazione dei dischi, da 3 1–celle che collegano le 0–celle, di cui una è il diametro agginto, e 2 2–celle. Data questa descrizione otteniamo che lo spazio Y è omotopicamente equivalente a due sfere unite per i due poli con l'aggiunta di un ulteriore segmento di congiunzione, scegliendo ora un polo e "scollando" le sfere ottenendo una nuova 1–cella si può vedere facilmente che lo spazio Y è omotopicamente equivalente al wedge di due sfere e di due circonferenze e otteniamo quindi:

$$\pi_1(Y) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4. (4a) Calcolare il seguente integrale lungo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 2:

$$I_k = \int_\gamma \frac{\cos(kz)}{z + \pi/2} dz, \quad \text{con } k \text{ intero positivo.}$$

(4b) Calcolare il seguente integrale applicando il Teorema dei residui:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx.$$

SOLUZIONE: (4a) Possiamo applicare il teorema dei residui al punto $p = -\pi/2$, di conseguenza l'integrale risulta:

$$I_k = 2\pi i Res_p(f) = 2\pi i \cos(k(-\pi/2))$$

Ora dobbiamo fare delle distinzioni a seconda del valore di k:

1. k dispari, allora otteniamo $\cos(k(-\pi/2) = 0$ e quindi $I_k = 0$,
2. k multiplo di 4, allora otteniamo $\cos(k(-\pi/2)) = 1$ e quindi $I_k = 2\pi i$
3. k multiplo di 2 e non di 4, allora otteniamo $\cos(k(-\pi/2) = -1$ e quindi $I_k = -2\pi i$.

(4b) Sia $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, per la teoria sappiamo che l'integrale di $f(x)e^{ix}$ si può calcolare tramite il teorema dei residui utilizzando la stessa funzione a variabile complessa. Inoltre l'integrale da noi cercato è dato dalla parte immaginaria dello stesso. Ora l'unico polo di f sull'asse $Im(z) > 0$ è dato da $z_1 = i$ e quindi abbiamo che:

$$I = 2\pi Res_{z_1}(f(z)e^{iz}).$$

Procedendo ora con il calcolo del residuo otteniamo il valore dell'integrale cercato:

$$I = 2\pi(z-i)\frac{ze^{iz}}{z^2+1}_{|z=i} = 2\pi \frac{ze^{iz}}{z+i}_{|z=i} = 2\pi \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$