Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2023/2024

26 agosto 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Consideriamo l'intervallo $I := [-1, 1]$ della retta reale $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{P}(I)$ l'insieme delle parti di I e siano $\mathcal{B}_{-1}$, $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ i seguenti tre sottoinsiemi di $\mathcal{P}(I)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{-1} &:= \{[-1, a) \in \mathcal{P}(I) \mid a \in (0, 1]\}, \\ \mathcal{B}_0 &:= \{(b, a) \in \mathcal{P}(I) \mid b \in [-1, 0), a \in (0, 1]\}, \\ \mathcal{B}_1 &:= \{(b, 1] \in \mathcal{P}(I) \mid b \in [-1, 0)\}. \end{aligned}$$

Denotiamo con $\mathcal{B}$ la famiglia dei sottoinsiemi di I aventi una delle tre forme precedenti ovvero $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{-1} \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$.

(1a) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia η su I e che η soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

(1b) Si dimostri che (I, η) è compatto.

(1c) Si calcoli la frontiera di $\{0\}$ in (I, η).

(1d) Sia $(\mathbb{R}^2, \tau)$ il piano cartesiano dotato della topologia euclidea e sia $f : (I, \eta) \to (\mathbb{R}^2, \tau)$ la funzione definita ponendo $f(x) := (5, -x)$ per ogni $x \in I$. Si dica se f è continua.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ tale che $[x]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Q}$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$ e $[x]_{\mathcal{R}} = \{x\}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Indichiamo con $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{R}$ modulo $\mathcal{R}$.

(2a) Si dimostri che $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ è connesso, ma non di Hausdorff.

(2b) Si dica se $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ è uno spazio topologico banale.

(2d) Si dimostri che l'applicazione $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathcal{R}$ di passaggio al quoziente non è chiusa.

Esercizio 3. Sia T il toro ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z della circonferenza

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y - 2)^2 + z^2 = 1, x = 0\}.$$

Siano D_1 e D_2 i dischi chiusi definiti da

$$D_1 = \{y = 0, (x - 2)^2 + z^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad D_2 = \{y = 0, (x + 2)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Sia X lo spazio topologico $X = T \cup D_1 \cup D_2$.

(3a) Si mostri che lo spazio $X \setminus C$ è semplicemente connesso.

(3b) Si calcoli il gruppo fondamentale di $Y := X \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, y = z = 0\}$.

Esercizio 4. (4a) Calcolare il seguente integrale lungo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 2:

$$I_k = \int_\gamma \frac{\cos(kz)}{z+\pi/2}dz, \quad \text{con } k \text{ intero positivo.}$$

(4b) Calcolare il seguente integrale applicando il Teorema dei residui:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}dx.$$