Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022
29 agosto 2022

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. Uno spazio topologico X è detto *localmente connesso per archi* se ogni suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi per archi o, equivalentemente, se vale la seguente proprietà: per ogni punto $p \in X$ e per ogni intorno U di p in X, esiste un intorno V di p in X tale che $V \subset U$ e l'insieme V, dotato della topologia relativa indotta da X, è connesso per archi.

(1a) Si dimostri che uno spazio topologico localmente euclideo è localmente connesso per archi.

(1b) Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi, sia $p \in X$ e sia A_p il sottoinsieme di X formato da tutti i punti $q \in X$ tali che esiste un arco continuo $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Si dimostri che A_p è aperto e chiuso in X. Si deduca da quest'ultima affermazione che uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.

(1c) Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi, sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X e sia $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proiezione naturale al quoziente topologico. Si dimostri che, se π è aperta, allora $X/\mathcal{R}$ è localmente connesso per archi.

SOLUZIONE: (1a) Supponiamo che X sia localmente euclideo. Sia $p \in X$, sia W un intorno aperto di p in X, sia $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathbb{B}(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_n < 1\}$ la palla aperta di $\mathbb{R}^n$ centrata in 0 di raggio 1 e sia $\varphi : W \to \mathbb{B}(0,1)$ un omeomorfismo. Consideriamo un intorno U di p in X. Osserviamo che $W \cap U$ è un intorno di p in X e $\varphi(W \cap U)$ è un intorno di 0 in $\mathbb{B}(0,1)$ (e quindi in $\mathbb{R}^n$). Esiste allora $\epsilon > 0$ tale che $\mathbb{B}(0,\epsilon) \subset \varphi(W \cap U)$. Segue che $\varphi^{-1}(\mathbb{B}(0,\epsilon))$ è un intorno aperto di p in W (e quindi in $\mathbb{R}^n$) contenuto in U. Inoltre il sottospazio topologico $\varphi^{-1}(\mathbb{B}(0,\epsilon))$ di X è connesso per archi in quanto immagine continua dello spazio topologico connesso per archi $\mathbb{B}(0,\epsilon)$.

(1b) Sia $q \in A_p$ e sia $\gamma : [0,1] \to X$ un arco continuo tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Consideriamo un intorno connesso per archi V di q in X (che esiste per ipotesi), un punto $z \in V$ e un arco continuo $\sigma : [0,1] \to V$ tale che $\sigma(0) = q$ e $\sigma(1) = z$. Sia $j : V \hookrightarrow X$ l'inclusione di V in X (che è continua in quanto V è dotato della topologia di sottospazio) e sia $\sigma' : [0,1] \to X$ l'arco continuo $\sigma' := j \circ \sigma$. Sia $\gamma * \sigma' : [0,1] \to X$ l'arco continuo definito ponendo $(\gamma * \sigma')(s) := \gamma(2s)$ se $s \in [0, \frac{1}{2}]$ e $(\gamma * \sigma')(s) := \sigma'(2s-1)$ se $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Poiché $(\gamma * \sigma')(0) = \gamma(0) = p$ e $(\gamma * \sigma')(1) = \sigma'(1) = z$, si ha che $z \in A_p$, ovvero $V \subset A_p$. Segue che A_p è intorno di ogni suo punto q, ovvero è aperto in X. Un ragionamento simile dimostra che anche $X \setminus A_p$ è aperto in X, ovvero A_p è chiuso in X.

Se X è sia localmente connesso per archi che connesso e p è un suo punto allora $A_p = X$, ovvero tutti i punti di X sono congiungibili a p con un arco continuo. Segue subito che X è connesso per archi (perché?).

(1c) Sia $\alpha \in X/\mathcal{R}$ e sia U un intorno di α in $X/\mathcal{R}$. A meno di restrizioni, possiamo supporre che U sia aperto in $X/\mathcal{R}$. Poiché π è surgettiva, esiste $p \in X$ tale che $\pi(p) = \alpha$. Poiché π è continua e X è localmente connesso per archi, $\pi^{-1}(U)$ è un intorno aperto di p in X ed esiste un intorno connesso per archi W di p in X contenuto in $\pi^{-1}(U)$. Sia Z un aperto di X tale che $p \in Z \subset W$. Poiché π è aperta e $\alpha = \pi(p) \in \pi(Z) \subset \pi(W)$, $\pi(Z)$ è un aperto di $X/\mathcal{R}$ e quindi $\pi(W)$ è un intorno in $X/\mathcal{R}$. Inoltre $\pi(W)$ è connesso per archi (in quanto immagine continua di un connesso per archi) ed è contenuto in $\pi(\pi^{-1}(U)) = U$. Ciò dimostra che $X/\mathcal{R}$ è localmente connesso per archi.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico compatto, sia $X \times X$ il prodotto topologico di X con se stesso e sia $\Delta = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$ la diagonale di X dotata della topologia relativa indotta da $X \times X$. Si dimostri che, se X è T_2, allora Δ è uno spazio topologico compatto.

È vero che Δ è uno spazio topologico compatto anche se X non è T_2?

SOLUZIONE: Consideriamo le applicazioni $f : X \to \Delta$ e $g : \Delta \to X$ definite ponendo $f(x) := (x, x)$ e $g(x, x) := x$ per ogni $x \in X$. Queste due applicazioni sono continue: la prima grazie alla proprietà universale del prodotto topologico e la seconda in quanto restrizione su Δ della proiezione canonica $X \times X \to X$ sul primo (o sul secondo) fattore. Poiché $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_\Delta$, f e g sono omeomorfismi e $g = f^{-1}$, in particolare X e Δ sono omeomorfi. Segue che anche Δ è compatto, indipendentemente dal fatto che X sia o meno T_2.

Nel caso in cui X fosse T_2, un'altra dimostrazione è le seguente: Δ è un sottoinsieme chiuso (perché X è T_2) dello spazio topologico compatto $X \times X$ (per Tychonoff), quindi Δ è compatto.

Esercizio 3. Sia S la superficie formata dalle quattro facce di un tetraedro in $\mathbb{R}^3$ e siano T_1, T_2, T_3, T_4 gli spazi topologici ottenuti da S togliendo, rispettivamente, l'interno di una, due, tre o quattro facce (triangolari).

(3a) Calcolare i gruppi fondamentali di S, T_1, T_2, T_3 e T_4.

(3b) Stabilire quali, tra gli spazi S, T_1, T_2, T_3 e T_4, sono omeomorfi a una superficie topologica compatta.

SOLUZIONE: (3a) La superficie S è omeomorfa alla sfera S^2 (ad esempio, basta considerare la sfera con centro il baricentro del tetraedro e la proiezione radiale dai punti di S^2 sui punti di S). Dunque $\pi(S, x_0) \simeq \pi(S^2, P) \simeq \{1\}$ (S è semplicemente connessa).

Togliendo l'interno di una faccia, otteniamo uno spazio omeomorfo a un disco chiuso (ad esempio, considerando la proiezione ortogonale alla faccia rimossa, si ottiene un omeomorfismo di T_1 con un triangolo chiuso), quindi ancora semplicemente connesso: $\pi(T_1, x_0) \simeq \{1\}$. Togliendo due facce, otteniamo uno spazio con due facce rimanenti, necessariamente adiacenti. Contraendo tali facce chiuse (è un CW-complesso) si ottiene che T_2 è omotopicamente equivalente a una circonferenza (i 4 vertici del tetraedro e 5 dei sei lati si incollano in un unico punto): dunque $\pi(T_2, x_0) \simeq \pi(S^1, P) \simeq \mathbb{Z}$. Togliendo tre facce, otteniamo uno spazio con una faccia rimanente. Contraendo tale faccia chiusa si ottiene che T_3 è omotopicamente equivalente al bouquet di due circonferenze (3 vertici del tetraedro e 3 dei sei lati si incollano in un unico punto): dunque $\pi(T_3, x_0) \simeq \pi(S^1 \vee S^1, P) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Infine, togliendo tutte le 4 facce, si ottiene uno spazio omotopicamente equivalente al bouquet di tre circonferenze (si consideri ancora la proiezione ortogonale ad una faccia rimossa), e $\pi(T_4, x_0) \simeq \pi(S^1 \vee S^1 \vee S^1, P) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(3b) Solo $S \simeq S^2$ è omeomorfo ad una superficie compatta, in quanto $T_1 \not\simeq S^2$ (T_1 è contraibile, S^2 no) e nessuna superficie topologica compatta ha gruppi fondamentali isomorfi a quelli di T_2, T_3, T_4.

Esercizio 4. (4a) Si usi il calcolo dei residui per determinare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)}dz$$

dove γ è il bordo del triangolo di vertici $1-i$, $1+i$, -3, percorso in senso orario.

(4b) Sia f funzione olomorfa su un intorno aperto del disco chiuso $\overline{B_{x_0}(r)}$, non identicamente nulla. Mostrare che f ha al più un numero finito di zeri nel disco aperto $B_{x_0}(r)$.

SOLUZIONE: (4a) Per il Teorema dei residui, essendo $Ind_\gamma(z) = -1$ per $z \in \{0, -1, -2\}$, si ha

$$I = \int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)}dz = -2\pi i(Res_0(f)+Res_{-1}(f)+Res_{-2}(f)) = -2\pi i(1/2-1/e+1/(2e^2)).$$

Quindi $I = -\pi i(1-2e^{-1}+e^{-2}) = -\pi i(1-e^{-1})^2$.

(4b) Se f avesse infiniti zeri in $B_{x_0}(r)$, allora ci sarebbe un punto di accumulazione dell'insieme degli zeri di f nel disco chiuso $\overline{B_{x_0}(r)}$ (per Bolzano-Weierstrass), e quindi in un aperto dove f è olomorfa. Per il Teorema degli zeri, f dovrebbe essere identicamente nulla in tale aperto e quindi in tutto il dominio per il Principio di identità.