Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022

29 agosto 2022

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. Uno spazio topologico X è detto *localmente connesso per archi* se ogni suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi per archi o, equivalentemente, se vale la seguente proprietà: per ogni punto $p \in X$ e per ogni intorno U di p in X, esiste un intorno V di p in X tale che $V \subset U$ e l'insieme V, dotato della topologia relativa indotta da X, è connesso per archi.

(1a) Si dimostri che uno spazio topologico localmente euclideo è localmente connesso per archi.

(1b) Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi, sia $p \in X$ e sia A_p il sottoinsieme di X formato da tutti i punti $q \in X$ tali che esiste un arco continuo $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Si dimostri che A_p è aperto e chiuso in X. Si deduca da quest'ultima affermazione che uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.

(1c) Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi, sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X e sia $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proiezione naturale al quoziente topologico. Si dimostri che, se π è aperta, allora $X/\mathcal{R}$ è localmente connesso per archi.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico compatto, sia $X \times X$ il prodotto topologico di X con se stesso e sia $\Delta = \{(x,y) \in X \times X : x = y\}$ la diagonale di X dotata della topologia relativa indotta da $X \times X$. Si dimostri che, se X è T_2, allora Δ è uno spazio topologico compatto.

È vero che Δ è uno spazio topologico compatto anche se X non è T_2?

Esercizio 3. Sia S la superficie formata dalle quattro facce di un tetraedro in $\mathbb{R}^3$ e siano T_1, T_2, T_3, T_4 gli spazi topologici ottenuti da S togliendo, rispettivamente, l'interno di una, due, tre o quattro facce (triangolari).

(3a) Calcolare i gruppi fondamentali di S, T_1, T_2, T_3 e T_4.

(3b) Stabilire quali, tra gli spazi S, T_1, T_2, T_3 e T_4, sono omeomorfi a una superficie topologica compatta.

Esercizio 4. (4a) Si usi il calcolo dei residui per determinare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)} dz$$

dove γ è il bordo del triangolo di vertici $1-i$, $1+i$, -3, percorso in senso orario.

(4b) Sia f funzione olomorfa su un intorno aperto del disco chiuso $\overline{B_{x_0}(r)}$, non identicamente nulla. Mostrare che f ha al più un numero finito di zeri nel disco aperto $B_{x_0}(r)$.