Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2022/2023

5 febbraio 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia $(\mathbb{R}, \tau)$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia η la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita ponendo

$$\eta := \{\mathbb{R}\} \cup \{A \in \tau : 0 \notin A\}.$$

(1a) Si dimostri che η è una topologia su $\mathbb{R}$ che non soddisfa la condizione T_1.

(1b) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $g(x) := x^2$. Si dimostri che $g : (X, \eta) \to (X, \eta)$ è continua. È vero che anche $g : (X, \eta) \to (X, \tau)$ è continua?

(1c) Sia $(\mathbb{R}^2, \eta^2)$ il prodotto topologico di $(\mathbb{R}, \eta)$ con se stesso. Si dimostri che ogni sottoinsieme di $(\mathbb{R}^2, \eta^2)$ contenente l'origine di $\mathbb{R}^2$ è connesso.

Esercizio 2. Sia $(\mathbb{R}, \tau)$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $([0, +\infty), \xi)$ un suo sottospazio topologico. Definiamo la relazione di equivalenza $\sim$ su $[0, +\infty)$ ponendo

- $[x]_\sim := \{x\}$ se $x \in [0, 1)$ e
- $[x]_\sim := [1, +\infty)$ se $x \in [1, +\infty)$.

Indichiamo con $([0, +\infty)/_\sim, \xi_\sim)$ lo spazio topologico quoziente di $([0, +\infty), \xi)$ modulo $\sim$ e con $\pi : ([0, +\infty), \xi) \to ([0, +\infty)/_\sim, \xi_\sim)$ la proiezione naturale al quoziente topologico.

(2a) Si dimostri che π non è aperta.

(2b) Si dica se $([0, +\infty)/_\sim, \xi_\sim)$ è compatto.

(2c) Si dimostri che $([0, +\infty)/_\sim, \xi_\sim)$ è omeomorfo a $[0, 1]$ dotato della topologia relativa indotta da $(\mathbb{R}, \tau)$.

Esercizio 3. Sia T il toro ottenuto dal quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ identificando i lati opposti e sia $\pi : Q \to T$ la proiezione sullo spazio quoziente. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario chiuso, con bordo $S^1 = \partial D$. Sia X lo spazio topologico ottenuto dall'unione disgiunta di D e T identificando mediante un omeomorfismo i punti di $S^1 = \partial D$ con i punti di T corrispondenti alla diagonale del quadrato, cioè l'insieme $\pi(\Delta) = \{[(t, t)] \mid t \in [0, 1]\}$.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X mediante il teorema di Seifert-Van Kampen.

(3b) Mostrare che X non è omotopicamente equivalente a una superficie compatta.

Esercizio 4. (4a) Calcolare il seguente integrale lungo la circonferenza unitaria γ_1 percorsa in senso antiorario:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2(z-1/2)} dz$$

(4b) Calcolare il seguente integrale in due modi: usando la formula integrale di Cauchy e applicando il Principio dell'argomento:

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{2z+1}{z^2+z} dz$$

con $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1/2\}$ circonferenza percorsa in senso antiorario.