Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022
6 febbraio 2023

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti della retta reale $\mathbb{R}$. Definiamo il sottoinsieme ξ di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ponendo

$$\xi := \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-r, r) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, r \in \mathbb{R}, r > 0\}.$$

(1a) Si dimostri che ξ è una topologia su $\mathbb{R}$ strettamente meno fine della topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

(1b) Si dimostri che l'intervallo $(-1, 2]$ è un sottoinsieme compatto di $(\mathbb{R}, \xi)$.

(1c) Sia $\xi^\bullet$ la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di ξ con ξ. Si dimostri che il sottospazio topologico $Y := \{(0, 0), (1, 1)\}$ di $(\mathbb{R}^2, \xi^\bullet)$ è connesso per archi.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea, sia I l'intervallo $[0, 2]$ di $\mathbb{R}$ dotato della topologia relativa e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su I tale che $[x]_{\mathcal{R}} = [0, 1] \cup \{2\}$ se $x \in [0, 1] \cup \{2\}$ e $[x]_{\mathcal{R}} = \{x\}$ se $x \in (1, 2)$. Indichiamo con $I/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di I modulo $\mathcal{R}$.

(2a) Si dimostri che $I/\mathcal{R}$ è T_2.

(2b) Si dimostri che la proiezione naturale $\pi : I \to I/\mathcal{R}$ è chiusa.

Esercizio 3. Siano X e Y i sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$ così definiti

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1, z = 0\}, \quad Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}.$$

Sia $Z = \mathbb{RP}^2$ il piano proiettivo.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

(3b) Si stabilisca se esiste una retrazione $r : X \to A$, con A sottospazio di X omeomorfo a Y o a Z. In caso positivo, dire se si tratta di un retratto di deformazione.

SOLUZIONE (breve): (a) Si può usare Seifert-Van Kampen, scegliendo gli aperti $U_1 = X \cap \{x < 1/2\}$, $U_2 = X \cap \{x > -1/2\}$. L'intersezione $U_1 \cap U_2$ è omotopicamente equivalente a un piano meno due punti. Dunque

$$\pi(U_1, x_0) = \langle a \,|\, \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z}, \quad \pi(U_2, x_0) = \langle b \,|\, \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z}, \quad \pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \alpha, \beta \,|\, \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Si ha $i_{1*}(\alpha) = a = i_{1*}(\beta)$ e $i_{2*}(\beta) = b = i_{2*}(\alpha)$. Dunque

$$\pi(X, x_0) = \langle a, b \,|\, a = b \rangle \simeq \langle a \,|\, \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

(b) Esiste una retrazione $r : X \to A$, con A sottospazio di X omeomorfo a Y. Si può prendere ad esempio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1/2, z = 0\}$ e r ottenuta componendo la proiezione ortogonale sul piano $z = 0$ con una retrazione radiale nel piano. Non è di deformazione (i gruppi fondamentali non sono isomorfi).

Non esiste una retrazione $r : X \to A$, con A sottospazio di X omeomorfo a Z (il gruppo fondamentale di Z ($\simeq \mathbb{Z}_2$) non è isomorfo a un sottogruppo di $\mathbb{Z}$).

Esercizio 4. (4a) Sia γ la circonferenza unitaria, percorsa in senso antiorario. Si calcoli l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^2(z - 1/2)}$$

(4b) Mostrare che la funzione $f(z) = e^z + 5z^3 + 1$ ha tre zeri nel disco unitario aperto D.

SOLUZIONE (breve): (a) f ha un polo doppio in $z_1 = 0$ e un polo semplice in $z_2 = 1/2$. Inoltre

$$Res_{z_1}(f) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{z - 1/2} \right)' = -4, \quad Res_{z_2}(f) = \lim_{z \to 1/2} \frac{1}{z^2} = 4$$

Dunque $I = -4 + 4 = 0$.

(b) Sia $g(z) = 5z^3$ e sia $\gamma = \partial D$. Allora per ogni z su γ, vale

$$|f(z) - g(z)| = |e^z + 1| \leq |e^z| + 1 \leq e + 1 < 5 = |g(z)|.$$

Per il Teorema di Rouché, f ha 3 zeri in D.