Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022
8 luglio 2022

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia η la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita ponendo

$$\eta := \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\}.$$

(1a) Si dimostri che η è una topologia di $\mathbb{R}$, non Hausdorff, strettamente meno fine della topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

(1b) Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito ponendo $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Si calcoli la parte interna, la chiusura e la frontiera di S in $(\mathbb{R}, \eta)$.

(1c) Sia Q il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ di $\mathbb{R}^2$ e sia η^2 la topologia prodotto di η con η. Si dica se Q è un sottoinsieme compatto e/o connesso di $(\mathbb{R}^2, \eta^2)$.

SOLUZIONE: (1a) η contiene $\varnothing$ and $\mathbb{R}$ per definizione. Sia $\{(-\infty, a_i)\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ appartenenti a η. Indichiamo con $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ l'estremo superiore del sottoinsieme $\bigcup_{i \in I}\{a_i\}$ di $\mathbb{R}$. Osserviamo che $\bigcup_{i \in I}(-\infty, a_i) = (-\infty, M)$ (perché?), dove $(-\infty, M) = \mathbb{R}$ se $M = +\infty$. Dunque $\bigcup_{i \in I}(-\infty, a_i) = (-\infty, M) \in \eta$. Se I è finito e $m \in \mathbb{R}$ è il minimo del sottoinsieme finito $\bigcup_{i \in I}\{a_i\}$ di $\mathbb{R}$, allora $\bigcap_{i \in I}(-\infty, a_i) = (-\infty, m) \in \eta$. Ciò dimostra che η è una topologia di $\mathbb{R}$.

Dimostriamo che η non è di Hausdorff. Sia $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$ e sia $c := \min\{a, b\} - 1$. Siano U un intorno di a e V un intorno di b in $(\mathbb{R}, \eta)$. Per definizione di intorno, esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tale che $a \in (-\infty, A) \subset U$ e $b \in (-\infty, B) \subset V$. In particolare, si ha $A \geq a$ e $B \geq b$. Vale $c \in (-\infty, A) \cap (-\infty, B) \subset U \cap V$ e quindi $U \cap V \neq \varnothing$. Segue che η non è di Hausdorff.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $(-\infty, a)$ appartiene alla topologia euclidea $\tau_{\mathcal{E}}$ di $\mathbb{R}$. Dunque, η è meno fine di $\tau_{\mathcal{E}}$. Osserviamo infine che l'aperto euclideo $(0,2)$ di $\mathbb{R}$ non appartiene a η infatti ogni aperto di η contenente 1 include anche l'intervallo $(-\infty, 1]$ (perché?). D'altra parte $(0,2)$ contiene 1 ma non include l'intervallo $(-\infty, 1]$. Segue che η è strettamente meno fine di $\tau_{\mathcal{E}}$.

(1b) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{V}(a) := \{(-\infty, b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : b > a\}$. Osserviamo che $\mathcal{V}(a)$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di a in $(\mathbb{R}, \eta)$. Infatti se U è un intorno di a in $(\mathbb{R}, \eta)$ allora esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $a \in (-\infty, b) \subset U$; in particolare $b > a$. Il punto a è aderente a S in $(\mathbb{R}, \eta)$ se e soltanto se $(-\infty, b) \cap S \neq \varnothing$ per ogni $(-\infty, b) \in \mathcal{V}(a)$ o, equivalentemente, se per ogni $b > a$ esiste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $\frac{1}{n} < b$. Ciò avviene se e soltanto se $a \in [0, +\infty)$. Dunque la chiusura $\overline{S}$ di S in $(\mathbb{R}, \eta)$ è uguale a $[0, +\infty)$. Segue che $\mathrm{Est}(S) = \mathbb{R} \setminus \overline{S} = (-\infty, 0)$. Osserviamo infine che il complementare $\mathbb{R} \setminus S$ di S in $\mathbb{R}$ contiene $(-\infty, 0)$ e che ogni aperto nonvuoto di η

interseca $(-\infty, 0)$. Segue che ogni aperto nonvuoto di η interseca $\mathbb{R} \setminus S$. Dunque $\mathbb{R} \setminus S$ è denso in $(\mathbb{R}, \eta)$. In particolare, $\mathrm{Fr}(S) = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus S} = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$.

(1c) Indichiamo con $\tau_{\mathcal{E}}^2$ la topologia prodotto di $\tau_{\mathcal{E}}$ con $\tau_{\mathcal{E}}$ (che è uguale alla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$). Poiché η è meno fine di $\tau_{\mathcal{E}}$ anche η^2 è meno fine di $\tau_{\mathcal{E}}^2$ (per costruzione di topologia prodotto), dunque l'applicazione identità $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, \tau_{\mathcal{E}}^2) \to (\mathbb{R}^2, \eta^2)$ è continua. È ben noto che Q è compatto e connesso in $(\mathbb{R}^2, \tau_{\mathcal{E}}^2)$ e che la compattezza e la connessione si preservano per immagine continua. Segue che $Q = \mathrm{id}(Q)$ è anche compatto e connesso in $(\mathbb{R}^2, \eta^2)$.

Esercizio 2. Uno spazio topologico (X, τ) è detto *localmente compatto* se ogni suo punto possiede un intorno compatto in (X, τ) ovvero se, per ogni $x \in X$, esiste un intorno U_x di x in (X, τ) tale che U_x sia anche un sottoinsieme compatto di (X, τ) (dunque U_x è un intorno compatto di x in (X, τ)).

Sia (X, τ) uno spazio topologico localmente compatto e sia $f : (X, \tau) \to (Y, \xi)$ una applicazione continua, surgettiva ed aperta tra spazi topologici. Si dimostri che anche (Y, ξ) è localmente compatto.

SOLUZIONE: Sia $y \in Y$ e sia $x \in X$ tale che $f(x) = y$ (che esiste per surgettività di f). Consideriamo un intorno compatto U di x in X e un aperto A di X tale che $x \in A \subset U$. Poiché f è aperta, $f(A)$ è un aperto di Y che contiene $f(x) = y$. D'altra parte f è continua e quindi $f(U)$ è un sottoinsieme compatto di Y. Poiché $y \in f(A) \subset f(U)$ segue che $f(U)$ è un intorno compatto di y in Y.

Esercizio 3. Siano A e B i sottospazi topologici di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}, \quad B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, z^2 + w^2 = 1\}.$$

(3a) Calcolare i gruppi fondamentali di A e di B.

(3b) Calcolare i gruppi fondamentali di $A \cap B$ e di $A \cup B$.

SOLUZIONE: (3a) A e B sono omeomorfi al prodotto topologico $S^1 \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \times S^1$, e quindi, per il teorema del prodotto, $\pi(A, x_0) \simeq \pi(B, x_0) \simeq \pi(S^1) \oplus \pi(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{Z}$ per ogni $x_0 \in A \cap B$. La stessa conclusione si ottiene verificando che $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ha $S^1 \times \{0\}$ come retratto di deformazione, e $S^1 \times \{0\}$ è omeomorfo a S^1.

(3b) $A \cap B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1\} = \{((x, y), (z, w)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1\} \simeq S^1 \times S^1$ e quindi $\pi(A \cap B, x_0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.

Per calcolare $\pi(A \cup B), x_0)$, si può applicare il Teorema di Seifert-Van Kampen. Ad esempio, siano

$$U_1 = A \cup (B \setminus (B_O(r) \times S^1)) = (A \cup B) \setminus (B_O(r) \times S^1),$$
$$U_2 = B \cup (A \setminus (S^1 \times B_O(r))) = (A \cup B) \setminus (S^1 \times B_O(r)),$$

con $B_0(r)$ palla chiusa in $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio $r < 1$. U_1, U_2 sono aperti in $A \cup B$, connessi per archi e non vuoti, con intersezione $U_1 \cap U_2$ non vuota e connessa per archi. U_1 ha $A \cup (S^1 \times S^1) = A$ come retratto di deformazione (poiché $B \setminus (B_O(r) \times S^1) = (\mathbb{R}^2 \setminus B_O(r)) \times S^1$ si retrae su $S^1 \times S^1$) e analogamente U_2 ha B come retratto di deformazione, mentre $U_1 \cap U_2 = (A \setminus (S^1 \times B_O(r))) \cup B \setminus (B_O(r) \times S^1)$ si retrae su $A \cap B$.

Sia $x_0 = (1, 0, 1, 0) \in A \cap B$. Allora $\pi(A, x_0) = \langle \alpha \,|\, \emptyset \rangle$, $\pi(B, x_0) = \langle \beta \,|\, \emptyset \rangle$, $\pi(A \cap B, x_0) = \langle \alpha, \beta \,|\, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$. Si ha

$$i_{1*}(\alpha) = \alpha, \; i_{2*}(\alpha) = 1, \; i_{1*}(\beta) = 1, \; i_{2*}(\beta) = \beta,$$

poiché in $U_2 \sim B$ il cappio $i_{2*}(\alpha)$ è omotopo al cammino costante in x_0. Infatti $U_2 = (\mathbb{R}^2 \times S^1) \cup (S^1 \times \mathbb{R}^2 \setminus B_O(r))$ e α è defnito dal cappio $a(t) = (\cos t, \sin t, 1, 0)$, che in $\mathbb{R}^2 \times S^1 \subseteq U_2$ si retrae al punto $x_0 = (1, 0, 1, 0)$. Analogamente per $i_{1*}(\beta)$ in $U_1 \sim A$. Dunque

$$\pi(A \cup B, x_0) = \langle \alpha, \beta \,|\, \alpha = 1, \beta = 1 \rangle = \{1\}$$

cioè $A \cup B$ è semplicemente connesso.

Esercizio 4. (4a) Si calcolino gli integrali di linea

$$\int_\gamma z e^{z^2} dz$$

prima con γ segmento da 1 a $2 + i$ e poi con γ semicirconferenza centrata nell'origine, passante per $1, i, -1$.

(4b) Si calcoli il numero degli zeri del polinomio $p(z) = -2z^5 + 6iz^2 + z + i$ appartenenti alla corona circolare $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z| \leq 2\}$.

SOLUZIONE: (4a) La funzione olomorfa $f(z) = ze^{z^2}$ ha primitiva olomorfa $g(z) = \frac{1}{2}e^{z^2}$, per cui il primo integrale vale $g(2+i) - g(1) = \frac{1}{2}(e^{(2+i)^2} - e)$, mentre il secondo vale $g(-1) - g(1) = \frac{1}{2}(e^1 - e^1) = 0$.

(4b) Si applichi il teorema di Rouché a $p(z)$ e a $g(z) = -2z^5$ sul disco $|z| < 2$: $|p(z) - g(z)| < 6 + 1 + 1 = 8 < |g(z)| = 2^6$ su $|z| = 2$. Dunque p ha tutte le sue cinque radici in $|z| < 2$. Applicando il teorema a p e $h(z) = 6iz^2$ sul disco $|z| < 1$ si ottiene che p ha due radici in $|z| < 1$. Quindi p ha tre radici nella corona C.