Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022
8 luglio 2022

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia η la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita ponendo

$$\eta := \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\}.$$

(1a) Si dimostri che η è una topologia di $\mathbb{R}$, non Hausdorff, strettamente meno fine della topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

(1b) Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito ponendo $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Si calcoli la parte interna, la chiusura e la frontiera di S in $(\mathbb{R}, \eta)$.

(1c) Sia Q il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ di $\mathbb{R}^2$ e sia η^2 la topologia prodotto di η con η. Si dica se Q è un sottoinsieme compatto e/o connesso di $(\mathbb{R}^2, \eta^2)$.

Esercizio 2. Uno spazio topologico (X, τ) è detto *localmente compatto* se ogni suo punto possiede un intorno compatto in (X, τ) ovvero se, per ogni $x \in X$, esiste un intorno U_x di x in (X, τ) tale che U_x sia anche un sottoinsieme compatto di (X, τ) (dunque U_x è un intorno compatto di x in (X, τ)).

Sia (X, τ) uno spazio topologico localmente compatto e sia $f : (X, \tau) \to (Y, \xi)$ una applicazione continua, surgettiva ed aperta tra spazi topologici. Si dimostri che anche (Y, ξ) è localmente compatto.

Esercizio 3. Siano A e B i sottospazi topologici di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}, \quad B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, z^2 + w^2 = 1\}.$$

(3a) Calcolare i gruppi fondamentali di A e di B.

(3b) Calcolare i gruppi fondamentali di $A \cap B$ e di $A \cup B$.

Esercizio 4. (4a) Si calcolino gli integrali di linea

$$\int_\gamma z e^{z^2} dz$$

prima con γ segmento da 1 a $2 + i$ e poi con γ semicirconferenza centrata nell'origine, passante per $1, i, -1$.

(4b) Si calcoli il numero degli zeri del polinomio $p(z) = -2z^5 + 6iz^2 + z + i$ appartenenti alla corona circolare $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z| \leq 2\}$.