Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2018/2019

11 gennaio 2019

Lo studente svolga i seguenti tre esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia τ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita ponendo:

$$\tau := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, 0 \notin A\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, 0 \in A, \mathbb{R} \setminus A \text{ è finito}\}.$$

(1a) Si dimostri che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

(1b) Si dica se la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ definita ponendo $f(x) := \cos(x)$ è continua.

(1c) Si dimostri che $(\mathbb{R}, \tau)$ è totalmente sconnesso, cioè che la componente connessa di ogni punto x di $(\mathbb{R}, \tau)$ è uguale a $\{x\}$.

(1d) Si dica se il sottoinsieme $[0, 1)$ di $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto.

(1e) Sia $(\mathbb{R}^2, \eta)$ il prodotto topologico di $(\mathbb{R}, \tau)$ con se stesso e sia J il segmento $[1, 2] \times \{0\}$ di $\mathbb{R}^2$. Si calcoli la chiusura di J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$.

SOLUZIONE. (1a) $\emptyset \in \tau$ in quanto $0 \notin \emptyset$ e $\mathbb{R} \in \tau$ in quanto $0 \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ è finito. Sia $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ una famiglia nonvuota di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ appartenenti a τ. Se $0 \notin A_i$ per ogni $i \in I$ allora $0 \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ e quindi $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$. Se $0 \in A_j$ per qualche $j \in I$ allora $0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$ e $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ è finito in quanto $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathbb{R} \setminus A_j$ e $\mathbb{R} \setminus A_j$ è finito. Dunque anche in questo caso $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$. Siano ora A_1 e A_2 due elementi di τ. Se $0 \in A_1 \cap A_2$ allora $\mathbb{R} \setminus A_1$ e $\mathbb{R} \setminus A_2$ sono finiti e quindi anche $\mathbb{R} \setminus (A_1 \cap A_2) = (\mathbb{R} \setminus A_1) \cup (\mathbb{R} \setminus A_2)$ lo è, e quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Se $0 \notin A_1 \cap A_2$ allora $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

(1b) f non è continua in quanto $\mathbb{R} \setminus \{0\} \in \tau$ ma $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \notin \tau$ (infatti $0 \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ ma $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ è infinito).

(1c) Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{C}(x)$ la sua componente connessa in $(\mathbb{R}, \tau)$. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{C}(x)$ contenga un punto $y \neq x$. Se $x = 0$ allora $y \neq 0$ e $\mathcal{C}(0) = (\mathcal{C}(0) \cap (\mathbb{R} \setminus \{y\})) \cup \{y\}$, dove $\mathbb{R} \setminus \{y\} \in \tau$ e $\{y\} \in \tau$. Poiché $\mathcal{C}(0) \cap (\mathbb{R} \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ (contiene 0) e $\{y\} \neq \emptyset$, segue che $\mathcal{C}(0)$ non è connesso, da cui l'assurdo. Similmente, se $x \neq 0$ allora $\mathcal{C}(x) = (\mathcal{C}(x) \cap (\mathbb{R} \setminus \{x\})) \cup \{x\}$. Segue che $\mathcal{C}(x)$ non è connesso, da cui l'assurdo.

(1d) Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1)$ in $(\mathbb{R}, \tau)$, ovvero $A_i \in \tau$ per ogni $i \in I$ e $[0, 1) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Esiste dunque $j \in I$ tale che $0 \in A_j$. Poiché $A_j \in \tau$, $\mathbb{R} \setminus A_j$ è finito. In particolare è finita l'intersezione $F := [0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus A_j)$. Se $F = \emptyset$ allora $[0, 1) \subset A_j$ e quindi $\{A_j\}$ è un sottoricoprimento finito di $[0, 1)$ estratto da $\{A_i\}_{i \in I}$. Se $F \neq \emptyset$ e $x_1, \ldots, x_n$ sono tutti gli elementi di F allora per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ esiste $i_k \in I$ tale che $x_k \in A_{i_k}$. Segue che $\{A_j\} \cup \bigcup_{k=1}^{n} \{A_{i_k}\}$ è un sottoricoprimento finito di $[0, 1)$ estratto da $\{A_i\}_{i \in I}$. Dunque $[0, 1)$ è compatto in $(\mathbb{R}, \tau)$.

(1e) Ricordiamo che la chiusura $\overline{J}$ di J in $(\mathbb{R}^2,\eta)$ coincide con $\overline{[1,2]}\times\overline{\{0\}}$, dove $\overline{[1,2]}$ e $\overline{\{0\}}$ indicano rispettivamente le chiusure di $[1,2]$ e di $\{0\}$ in $(\mathbb{R},\tau)$. Poiché $\mathbb{R}\setminus\{0\}\in\tau$, si ha che $\{0\}$ è chiuso in $(\mathbb{R},\tau)$ e quindi $\overline{\{0\}}=\{0\}$. Osserviamo inoltre che, se $x\in\mathbb{R}\setminus(\{0\}\cup[1,2])$, allora $\{x\}\in\tau\cap\mathcal{N}_\tau(x)$ e $\{x\}\cap[1,2]=\emptyset$, dunque x non è aderente a $[1,2]$ in $(\mathbb{R},\tau)$. Sia ora $U\in\mathcal{N}_\tau(0)$ e sia $A\in\tau$ tale che $0\in A\subset U$. Esiste dunque un sottoinsieme finito F di $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $A=\mathbb{R}\setminus F$. Poiché $[1,2]$ è infinito, segue che $A\cap[1,2]=[1,2]\setminus F\neq\emptyset$. In particolare $U\cap[1,2]\neq\emptyset$ e quindi 0 è aderente a $[1,2]$ in $(\mathbb{R},\tau)$. Abbiamo così dimostrato che $\overline{[1,2]}=\{0\}\cup[1,2]$. Dunque $\overline{J}=(\{0\}\cup[1,2])\times\{0\}=\{(0,0)\}\cup J$.

Ecco un altro modo di risolvere il presente esercizio. Per ogni $x\in\mathbb{R}$, sia $\mathcal{V}(x)$ il sistema fondamentale di intorni di x in $(\mathbb{R},\tau)$ definito ponendo $\mathcal{V}(x):=\{A\in\tau\,|\,x\in A\}$. Segue che, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la famiglia $\mathcal{V}^*(x,y):=\{U\times V\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)\,|\,U\in\mathcal{V}(x),V\in\mathcal{V}(y)\}$ è un sistema fondamentale di intorni di (x,y) in $(\mathbb{R}^2,\eta)$. Sia $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus J$. Se $x\neq0$ e $y\neq0$, allora $\{(x,y)\}\in\mathcal{V}^*(x,y)$ e $\{(x,y)\}\cap J=\emptyset$, dunque (x,y) non è aderente a J in $(\mathbb{R}^2,\eta)$. Se $x=0$ e $y\neq0$ allora $\mathbb{R}\times\{y\}\in\mathcal{V}^*(x,y)$ e $(\mathbb{R}\times\{y\})\cap J=\emptyset$, dunque (x,y) non è aderente a J in $(\mathbb{R}^2,\eta)$. Se $x\neq0$ (e quindi $x\notin\{0\}\cup[1,2]$) e $y=0$, allora $\{x\}\times\mathbb{R}\in\mathcal{V}^*(x,y)$ e $(\{x\}\times\mathbb{R})\cap J=\emptyset$, dunque (x,y) non è aderente a J in $(\mathbb{R}^2,\eta)$. Sia infine $(x,y)=(0,0)$ e sia $U\times V\in\mathcal{V}^*(0,0)$. Allora esistono due sottoinsiemi finiti F e G di $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tali che $U=\mathbb{R}\setminus F$ e $V=\mathbb{R}\setminus G$. Si osservi che $U\times V\supset(\mathbb{R}\setminus F)\times\{0\}$. Poiché $(\mathbb{R}\setminus F)\cap[1,2]=[1,2]\setminus F\neq\emptyset$, segue che $(U\times V)\cap J\supset([1,2]\setminus F)\times\{0\}\neq\emptyset$ e quindi $(0,0)$ è aderente a J in $(\mathbb{R}^2,\eta)$. Abbiamo così dimostrato che la chiusura di J in $(\mathbb{R}^2,\eta)$ è uguale a $\{(0,0)\}\cup J$.

Esercizio 2. Sia X l'intervallo $[-1,1]$ della retta reale $\mathbb{R}$ dotato della topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}$. Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su X ponendo:

$$x\,\mathcal{R}\,y \text{ se e soltanto se } (|x|=|y| \text{ e } |x|<1) \text{ oppure } (x=y \text{ e } |x|=1).$$

Indichiamo con $X/_{\mathcal{R}}$ lo spazio topologico quoziente di X modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi:X\to X/_{\mathcal{R}}$ l'applicazione di passaggio al quoziente.

(2a) Si dimostri che $X/_{\mathcal{R}}$ è uno spazio topologico T_1 ma non T_2.

(2b) Si costruisca un sottoinsieme non vuoto e compatto di $X/_{\mathcal{R}}$ che non sia chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$.

SOLUZIONE. (2a) Sia $x\in[-1,1]$. Dobbiamo dimostrare che il singoletto $\{\pi(x)\}$ è chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$. Poiché $\pi^{-1}(\pi(x))$ è uguale al chiuso $\{-x,x\}$ di $[-1,1]$ se $x\in[-1,1]\setminus\{-1,0,1\}$ ed è uguale al chiuso $\{x\}$ di $[-1,1]$ se $x\in\{-1,0,1\}$, segue che $X/_{\mathcal{R}}$ è T_1. Supponiamo per assurdo che $X/_{\mathcal{R}}$ sia anche T_2. Siano $\alpha:=\pi(-1)$ e $\beta:=\pi(1)$ due punti (distinti) di $X/_{\mathcal{R}}$. Siano anche U un intorno aperto di α in $X/_{\mathcal{R}}$ e V un intorno aperto di β in $X/_{\mathcal{R}}$ tali che $U\cap V=\emptyset$. Segue che $\pi^{-1}(U)$ è un intorno aperto π-saturo di -1 in $[-1,1]$, $\pi^{-1}(V)$ è un intorno aperto π-saturo di 1 in $[-1,1]$ e $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)=\emptyset$. Poiché $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(U)$ sono aperti in $[-1,1]$, esiste $\varepsilon>0$ tale che $[-1,-1+\varepsilon)\subset\pi^{-1}(U)$ e $(1-\varepsilon,1]\subset\pi^{-1}(V)$. D'altra parte gli insiemi $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(U)$ sono π-saturi e quindi $[-1,-1+\varepsilon)\cup(1-\varepsilon,1)\subset\pi^{-1}(U)$ e $(-1,-1+\varepsilon)\cup(1-\varepsilon,1]\subset\pi^{-1}(V)$. Segue che

$$(-1,-1+\varepsilon)\cup(1-\varepsilon,1)\subset\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)=\emptyset,$$

da cui l'assurdo.

(2b) Il sottoinsieme $\pi([0,1])$ di $X/_{\mathcal{R}}$ è compatto in quanto immagine continua di un compatto, ma non è chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$ in quanto $\pi^{-1}(\pi([0,1]))=(-1,1]$ che non è chiuso in $[-1,1]$ (-1 è aderente a $(-1,1]$ ma non appartiene a $(-1,1]$).

NOTA. L'esistenza di un sottoinsieme compatto non chiuso di $X/_{\mathcal{R}}$, come $\pi([0,1])$, implica che $X/_{\mathcal{R}}$ non è T_2 (infatti, in uno spazio topologico T_2, ogni sottoinsieme compatto è chiuso). Anche in questo modo si poteva dimostrare la seconda parte del precedente punto (2a).

Esercizio 3. Sia Y uno spazio topologico di Hausdorff e siano L e M due sottoinsiemi nonvuoti e compatti di Y tali che $L \cap M = \emptyset$. Si dimostri che esistono due aperti A e B di Y tali che $L \subset A$, $M \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.

SOLUZIONE. Per ogni $(x, y) \in L \times M$, si ha che $x \neq y$ e quindi, grazie alla condizione di Hausdorff, esistono due aperti $A_{x,y}$ e $B_{x,y}$ di Y tali che $x \in A_{x,y}$, $y \in B_{x,y}$ e $A_{x,y} \cap B_{x,y} = \emptyset$. Fissiamo $y \in M$. Poiché $\bigcup_{x \in L} A_{x,y} \supset L$ e L è compatto in Y, esiste un sottoinsieme finito $L(y)$ di L tale che $A_y := \bigcup_{x \in L(y)} A_{x,y} \supset L$. Poniamo $B_y := \bigcap_{x \in L(y)} B_{x,y}$. Si osservi che B_y è un intorno aperto di y disgiunto dall'intorno aperto A_y di L. Infatti vale:

$$A_y \cap B_y = \bigcup_{x \in L(y)} (A_{x,y} \cap B_y) \subset \bigcup_{x \in L(y)} (A_{x,y} \cap B_{x,y}) = \emptyset.$$

Poiché $\bigcup_{y \in M} B_y \supset M$ e M è compatto in Y, esiste un sottoinsieme finito M' di M tale che $B := \bigcup_{y \in M'} B_y \supset M$. Poniamo $A := \bigcap_{y \in M'} A_y$. Si osservi che B è un intorno aperto di M disgiunto dall'intorno aperto A di L. Infatti vale:

$$A \cap B = \bigcup_{y \in M'} (A \cap B_y) \subset \bigcup_{y \in M'} (A_y \cap B_y) = \emptyset.$$