Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2019/2020

20 gennaio 2020

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 1. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1a) Dato un arbitrario sottoinsieme S di X, indichiamo con $\overline{S}$, $\mathrm{Int}(S)$ e $\mathrm{Fr}(S)$ rispettivamente la chiusura, la parte interna e la frontiera di S in (X, τ). Si dimostri che, se T è un sottoinsieme di X tale che $T = \overline{\mathrm{Int}(T)}$, allora $\mathrm{Fr}(T) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(T))$.

Si fornisca un esempio di spazio topologico (X, τ) e di sottoinsieme T di X tali che $T \neq \overline{\mathrm{Int}(T)}$ e $\mathrm{Fr}(T) \neq \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(T))$.

(1b) Sia p un punto di X e sia $\tau_p := \{\emptyset\} \cup \{A \in \tau : p \in A\}$. Si dimostri che τ_p è una topologia su X e che lo spazio topologico (X, τ_p) è connesso per archi.

(1c) Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia τ di X. Si dimostri che (X, τ) è compatto se e soltanto se, per ogni ricoprimento $\{B_i\}_{i \in I}$ di X tale che $B_i \in \mathcal{B}$ per ogni $i \in I$, esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $\bigcup_{i \in J} B_i = X$.

Si fornisca un esempio di spazio topologico (X, τ) e di sottobase $\mathcal{S}$ di τ con le seguenti proprietà: (X, τ) non è compatto ma, per ogni ricoprimento $\{S_k\}_{k \in K}$ di X tale che $S_k \in \mathcal{S}$ per ogni $k \in K$, esiste un sottoinsieme finito H di K tale che $\bigcup_{k \in H} S_k = X$.

(1d) Supponiamo che (X, τ) soddisfi il primo assioma di numerabilità. Indichiamo con (Y, ξ) il prodotto topologico di (X, τ) con se stesso. Sia $f : (Y, \xi) \to (Z, \eta)$ una applicazione da (Y, ξ) in uno spazio topologico (Z, η). Si dimostri che f è continua se e soltanto se, per ogni $y \in Y$ e per ogni successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in Y che converge a y in (Y, ξ), la successione $\{f(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(y)$ in (Z, η).

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano reale dotato della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ definita ponendo:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ se e soltanto se } (x, y) = (x', y') \text{ oppure } (x, y) = (y', x').$$

Indichiamo con $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ la proiezione di passaggio al quoziente.

(2a) Si dimostri che π è sia aperta che chiusa.

(2b) Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea, sia J l'intervallo $[0, +\infty)$ di $\mathbb{R}$ dotato della topologia relativa e sia Z il prodotto topologico tra $\mathbb{R}$ e J. Si dimostri che esiste una applicazione continua e bigettiva $g : \mathbb{R}^2/\mathcal{R} \to Z$. Si dica infine se $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ è omeomorfo a Z.

Soluzioni

Esercizio 1

(1a). Sia T un sottoinsieme di X tale che $T = \overline{\mathrm{Int}(T)}$. Vogliamo provare che

$$\mathrm{Fr}(T) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(T)).$$

Ricordiamo che $\mathrm{Fr}(T) = \overline{T} \setminus \mathrm{Int}(T)$. Poiché $T = \overline{\mathrm{Int}(T)}$, l'insieme T è un chiuso di X; dunque $\overline{T} = T$ e $\mathrm{Fr}(T) = T \setminus \mathrm{Int}(T)$. D'altra parte, $\mathrm{Int}(T)$ è un aperto di X; dunque $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(T)) = \mathrm{Int}(T)$. Segue che $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(T)) = \overline{\mathrm{Int}(T)} \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(T)) = T \setminus \mathrm{Int}(T) = \mathrm{Fr}(T)$, come desiderato.

Se X è la retta reale $\mathbb{R}$ dotata della topologia euclidea e $T := \mathbb{Q}$ allora si ha che $\mathrm{Int}(T) = \emptyset$ e $\mathrm{Fr}(T) = \mathbb{R}$, quindi $T \neq \emptyset = \overline{\mathrm{Int}(T)}$ e $\mathrm{Fr}(T) = \mathbb{R} \neq \emptyset = \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(T))$.

(1b) Verifichiamo che τ_p è una topologia su X:

- $\emptyset \in \tau_p$ per definizione; $X \in \tau_p$ in quanto $X \in \tau$ e X contiene p.
- Siano $A, B \in \tau_p$. Poiché τ è una topologia su X, $A \cap B \in \tau$. D'altra parte, $p \in A$ e $p \in B$; dunque $p \in A \cap B$ e quindi $A \cap B \in \tau_p$.
- Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X appartenenti a τ_p, con $I \neq \emptyset$. Dato che τ è una topologia su X e $A_i \in \tau$ per ogni $i \in I$, anche l'unione $\bigcup_{i \in I} A_i$ appartiene a τ. D'altra parte, scelto un elemento j di I (che esiste perché $I \neq \emptyset$), $p \in A_j$. Segue che $p \in A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ e quindi $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_p$.

Mostriamo che (X, τ_p) è connesso per archi. Sia $\tau_{\mathcal{E}}$ la topologia euclidea su $[0,1]$. Scegliamo arbitrariamente due elementi a e b di X. Definiamo l'applicazione $\alpha : ([0,1], \tau_{\mathcal{E}}) \to (X, \tau_p)$ ponendo

$$\alpha(t) := \begin{cases} a & \text{se } t = 0, \\ b & \text{se } t = 1, \\ p & \text{se } t \in (0,1). \end{cases}$$

Dimostriamo che questa applicazione è continua. Sia $A \in \tau_p \setminus \{\emptyset\}$. Poiché $p \in A$, $\alpha^{-1}(A)$ contiene $(0,1)$. Segue che

$$\alpha^{-1}(A) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } a, b \in A, \\ [0,1) & \text{se } a \in A, b \notin A, \\ (0,1] & \text{se } a \notin A, b \in A, \\ (0,1) & \text{se } a \notin A, b \notin A. \end{cases}$$

Poiché gli insiemi $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1]$ e $(0,1)$ sono aperti di $\tau_{\mathcal{E}}$, si ha che α è continua.

(1c) Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia τ di X. Evidentemente, se (X, τ) è compatto e $\{B_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di X tale che $B_i \in \mathcal{B}$ per ogni $i \in I$, per definizione di compattezza (ed indipendentemente dal fatto che $B_i \in \mathcal{B}$ per ogni $i \in I$), esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $\bigcup_{i \in J} B_i = X$.

Supponiamo che (X, τ) abbia la seguente proprietà: per ogni ricoprimento $\{B_i\}_{i \in I}$ di X tale che $B_i \in \mathcal{B}$ per ogni $i \in I$, esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $\bigcup_{i \in J} B_i = X$. Dobbiamo provare che (X,τ) è compatto. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di (X,τ). Scriviamo ogni aperto A_i del ricoprimento come segue:

$$A_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{i,j}$$

per qualche sottofamiglia $\{B_{i,j}\}_{j\in J_i}$ di $\mathcal{B}$. Pertanto, possiamo scrivere

$$X = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} B_{i,j}.$$

Poiché ogni insieme $B_{i,j}$ è un elemento di $\mathcal{B}$, per ipotesi, esistono un sottoinsieme non-vuoto I' di I e, per ogni $i \in I'$, un sottoinsieme non-vuoto J'_i di J_i tali che

$$X = \bigcup_{i\in I'}\bigcup_{j\in J'_i} B_{i,j}.$$

D'altra parte, per ogni $i \in I'$, vale:

$$\bigcup_{j\in J'_i} B_{i,j} \subset \bigcup_{j\in J_i} B_{i,j} = A_i;$$

dunque $\{A_i\}_{i\in I'}$ è un sottoricoprimento finito di X estratto da $\{A_i\}_{i\in I}$. Ciò dimostra che (X,τ) è compatto.

NOTA. La seconda parte del punto (1c), ovvero la richiesta 'Si fornisca un esempio di spazio topologico (X,τ) e di sottobase $\mathcal{S}$ di τ con le seguenti proprietà: (X,τ) non è compatto ma, per ogni ricoprimento $\{S_k\}_{k\in K}$ di X tale che $S_k \in \mathcal{S}$ per ogni $k \in K$, esiste un sottoinsieme finito H di K tale che $\bigcup_{k\in H} S_k = X$.', non è stata formulata correttamente. Infatti un teorema di Alexander afferma che un tale esempio non esiste. Durante la correzione del compito, questa parte del punto (1c) è stata valutata come svolta correttamente da tutti gli studenti.

(1d) Ricordiamo innanzitutto che se (X,τ) è uno spazio topologico che soddisfa il primo assioma di numerabilità allora anche il prodotto topologico (Y,ξ) tra (X,τ) e se stesso lo è. Infatti, dati $x, y \in X$, se $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sono sistemi fondamentali di intorni rispettivamente di x e di y in (X,τ), allora $\{U_n \times V_m\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di (x,y) in (Y,ξ).

Supponiamo che f sia continua. Sia $y \in Y$ e sia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in Y che converge a y in (Y,ξ). Indicheremo quest'ultima proprietà di $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ scrivendo $\{y_n\}_n \to y$. Dobbiamo dimostrare che $\{f(y_n)\}_n \to f(y)$, ovvero che la successione $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(y)$ in (Y,ξ). Sia U un intorno di $f(y)$ in (Z,η). Poiché f è continua, $f^{-1}(U)$ è un intorno di y in (Y,η) (perchè?). D'altra parte, per ipotesi $\{y_n\}_n \to y$, dunque esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $y_n \in f^{-1}(U)$ per ogni $n \geq n_0$. Segue che $f(y_n) \in f(f^{-1}(U)) \subset U$ per ogni $n \geq n_0$. Ciò dimostra che $\{f(y_n)\}_n \to f(y)$.

Supponiamo ora che, per ogni $y \in Y$ e per ogni successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Y tale che $\{y_n\}_n \to y$, valga $\{f(y_n)\}_n \to f(y)$. Dobbiamo dimostrare che f è continua. Supponiamo che assurdo che f non sia continua. Esistono dunque $y \in Y$ e un intorno V di $f(y)$ in (Z,η) tale che $f(W) \not\subset V$ per ogni intorno W di y in (Y,ξ). Poichè Y soddisfa il primo assioma di numerabilità, esiste un sistema fondamentale di intorni $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di y in (Y,ξ) tale che $W_{n+1} \subset W_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $n \in \mathbb{N}$. Poiché $f(W_n) \not\subset V$, esiste $y_n \in W_n$ tale che $f(y_n) \notin V$. Evidentemente, $\{y_n\}_n \to y$ mentre $\{f(y_n)\}_n \not\to f(y)$, cioè $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $f(y)$ in (Z,η). Questo è assurdo.

Esercizio 2. Premettiamo una osservazione informale. La relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ identifica ogni punto di $\mathbb{R}^2$ con il punto simmetrico rispetto alla bisettrice B del primo e terzo quadrante. Dunque, intuitivamente, $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ si ottiene "piegando" $\mathbb{R}^2$ lungo B ed "incollando uno sull'altro" i due semipiani di $\mathbb{R}^2$ individuati da B, ottenendo così un solo semipiano.

(2a) Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione continua definita ponendo $\phi(x, y) := (y, x)$. Si osservi che ϕ è un omeomorfismo in quanto ϕ è bigettiva e la sua inversa coincide con ϕ stessa. Dato comunque un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$, si ha che $\pi^{-1}(\pi(S)) = S \cup \phi(S)$. Dunque, se S è aperto (rispettivamente chiuso), lo è anche $\phi(S)$ e quindi $\pi^{-1}(\pi(S)) = S \cup \phi(S)$. Segue che π è sia aperta che chiusa.

(2b) Sia $\mathbb{R}^2_+$ il sottoinsieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ di $\mathbb{R}^2$ dotata della topologia relativa indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$. Poiché il prodotto di topologie relative è la topologia relativa del prodotto, si ha che Z è omeomorfo a $\mathbb{R}^2_+$. Identifichiamo Z con $\mathbb{R}^2_+$. Sia $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di centro l'origine e di angolo $-\frac{\pi}{4}$, ovvero $r(x, y) = \left(x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}, -x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e sia $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_+$ l'applicazione continua $s(x, y) := (x, |y|)$. Denotiamo con $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_+$ la composizione $t := s \circ r$. Poichè t è continua, surgettiva e ha per fibre tutte e sole le classi di equivalenza di $\mathcal{R}$, esiste una applicazione bigettiva e continua $g : \mathbb{R}^2/\mathcal{R} \to \mathbb{R}^2_+$ tale che $t = g \circ \pi$.

Dimostriamo che g è anche un omeomorfismo. Per far ciò è sufficiente far vedere che t è una applicazione aperta. Infatti, se t è aperta e U è un aperto di $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$, allora $\pi^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e quindi $g(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2_+$, in quanto

$$g(U) = g(\pi(\pi^{-1}(U))) = (g \circ \pi)(\pi^{-1}(U)) = t(\pi^{-1}(U)).$$

Rimane da provare che t è aperta. Poiché $t = s \circ r$ e r è un omeomorfismo, l'apertura di t equivale a quella di s. Proviamo quindi che s è aperta. Indichiamo con $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto all'asse x, ovvero $R(x, y) := (x, -y)$. L'applicazione R è un omeomorfismo in quanto è continua, bigettiva e la sua inversa coincide con R stessa. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che $s(A) = (A \cap \mathbb{R}^2_+) \cup (R(A) \cap \mathbb{R}^2_+)$, e $A \cap \mathbb{R}^2_+$ e $R(A) \cap \mathbb{R}^2_+$ sono aperti di $\mathbb{R}^2_+$. Segue che $s(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2_+$. Questo prova che s è aperta e quindi g è un omeomorfismo.