Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2020/2021

8 gennaio 2021

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\tau_{\mathcal{E}}$ la topologia euclidea di $\mathbb{R}$ e sia η la topologia di $\mathbb{R}$ avente $\mathcal{B} = \{[a,b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ come una delle sue basi. Indichiamo con $(\mathbb{R}^2, \xi)$ il prodotto topologico tra $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}})$ e $(\mathbb{R}, \eta)$. Si calcoli la chiusura del sottoinsieme $\Gamma = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$ di $\mathbb{R}^2$ in $(\mathbb{R}^2, \xi)$.

SOLUZIONE. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, definiamo $\mathcal{V}(x) := \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, \epsilon > 0\}$ e $\mathcal{V}'(x) := \{[x, x+\epsilon) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, \epsilon > 0\}$. La famiglia $\mathcal{V}(x)$ è un s.f.i. di x in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}})$. Proviamo che $\mathcal{V}'(x)$ è un s.f.i. di x in $(\mathbb{R}, \eta)$. Sia $U \in \mathcal{N}_\eta(x)$ e sia $A \in \eta$ tale che $x \in A \subset U$. Poiché $\mathcal{B}$ è una base di η, si ha che $A = \bigcup_{i \in I}[a_i, b_i)$ per qualche famiglia $\{[a_i,b_i)\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$. Segue che $x \in \bigcup_{i \in I}[a_i, b_i)$; dunque $x \in [a_j, b_j)$ per qualche $j \in I$. In particolare, se definiamo $\epsilon := b_j - x > 0$, allora $x \in [x, x+\epsilon) \subset [a_j, b_j) \subset \bigcup_{i \in I}[a_i, b_i) = A \subset U$. Ciò dimostra che $\mathcal{V}'(x)$ è un s.f.i. di x in $(\mathbb{R}, \eta)$, come desiderato. Ricordiamo che, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la famiglia $\mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}'(y) := \{(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \times [y, y+\epsilon_2) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \,|\, \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0\}$ è un s.f.i. di (x,y) in $(\mathbb{R}^2, \xi)$. Osserviamo che, per ogni $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, si ha $(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \times [y, y+\epsilon_2) \supset (x-\epsilon, x+\epsilon) \times [y, y+\epsilon)$, dove $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$. Dunque, se definiamo $\mathcal{W}(x,y;\epsilon) := (x-\epsilon, x+\epsilon) \times [y, y+\epsilon)$ per ogni $\epsilon > 0$, allora anche la famiglia $\{\mathcal{W}(x,y;\epsilon) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \,|\, \epsilon > 0\}$ è un s.f.i. di (x,y) in $(\mathbb{R}^2, \xi)$.

Sia $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale di $\mathbb{R}^2$. Proviamo che la chiusura $\overline{\Gamma}$ di Γ in $(\mathbb{R}^2, \eta)$ è uguale a Δ. Se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, allora $x \neq y$ e $\mathcal{W}(x,y;|x-y|/2) \cap \Delta = \emptyset$; dunque $(x,y) \notin \overline{\Gamma}$. Segue che $\overline{\Gamma} \subset \Delta$. Sia $x \in \mathbb{R}$, sia $\epsilon > 0$ e sia $q \in \mathbb{Q} \cap (x, x+\epsilon)$. Osserviamo che $\mathcal{W}(x,x;\epsilon) \cap \Gamma$ contiene il punto (q,q). Segue che $\mathcal{W}(x,x;\epsilon) \cap \Gamma \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$; dunque $\Delta \subset \overline{\Gamma}$ e quindi $\Delta = \overline{\Gamma}$.

Esercizio 2. Sia (X, τ) uno spazio topologico T_2 e sia (Y, τ_Y) un suo sottospazio topologico. Supponiamo che Y non abbia punti isolati in (X, τ). Si dimostri che ogni aperto non vuoto di (Y, τ_Y) è un insieme infinito.

SOLUZIONE. (Y, τ_Y) è T_2 in quanto sottospazio topologico di uno spazio topologico T_2. In particolare, (Y, τ_Y) è T_1 ovvero i suoi singoletti sono chiusi di τ_Y. Supponiamo che esista un aperto non vuoto finito A di τ_Y. Siano $y_1, \ldots, y_a$ gli elementi di A. Si osservi che $a > 1$ ovvero A non può esser uguale ad un singoletto $\{y_1\}$ di Y. Altrimenti, esisterebbe un aperto U di τ tale che $U \cap Y = A = \{y_1\}$ ovvero y_1 sarebbe un punto isolato di Y in (X, τ), che è assurdo. Dunque, si ha che $a > 1$. Poichè i singoletti $\{y_2\}, \ldots, \{y_a\}$ di Y sono chiusi di τ_Y, anche la loro unione $\{y_2, \ldots, y_a\}$ è un chiuso di τ_Y ovvero $Y \setminus \{y_2, \ldots, y_a\}$ è un aperto di τ_Y. Segue che anche $\{y_1\} = A \cap (Y \setminus \{y_2, \ldots, y_a\})$ è un aperto di τ_Y ovvero y_1 è un punto isolato di Y in (X, τ), che è assurdo.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano reale dotato della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ definita ponendo:

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \text{ se e soltanto se } (x,y) = (x',y') \text{ oppure } y = y' = 0,$$

ovvero avente le seguenti $\mathcal{R}$-classi di equivalenza: $[(x,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x',0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x' \in \mathbb{R}\}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $[(x,y)]_{\mathcal{R}} = \{(x,y)\}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $y \neq 0$. Indichiamo con $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ la proiezione di passaggio al quoziente.

(3a) Si dimostri che $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ non è compatto.

(3b) Si dimostri che $\pi(\{-1,1\} \times \mathbb{R})$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

(3c) Sia O l'origine $(0,0)$ di $\mathbb{R}^2$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia P_n il punto di $\mathbb{R}^2$ di coordinate $\big(n+1, \frac{2}{n+1}\big)$. Si dimostri che la successione $\{\pi(P_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $\pi(O)$ in $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

SOLUZIONE. (3a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia U_n l'aperto di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo

$$U_n := \mathbb{R} \times (-n-1, n+1).$$

Si osservi che ciascun aperto U_n è π-saturo in quanto contiene $\mathbb{R} \times \{0\}$. Segue che $\pi(U_n)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e vale $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi(U_n) = \pi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) = \pi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$. Ciò dimostra che $\{\pi(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$. Da questo ricoprimento non si può estrarre alcun sottoricoprimento finito. Altrimenti esisterebbe $N \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbb{R}^2/\mathcal{R} = \pi(U_N)$ e quindi $\mathbb{R}^2 = \pi^{-1}(\mathbb{R}^2/\mathcal{R}) = \pi^{-1}(\pi(U_N)) = U_N$, che è assurdo. Dunque, $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ non è compatto.

(3b) I sottospazi topologici $\{-1\} \times \mathbb{R}$ e $\{1\} \times \mathbb{R}$ di $\mathbb{R}^2$ sono omeomorfi alla retta reale $\mathbb{R}$ dotata della topologia euclidea, che è connessa. Dunque tali sottospazi sono connessi. Poiché π è continua, i sottoinsiemi $\pi(\{-1\} \times \mathbb{R})$ e $\pi(\{1\} \times \mathbb{R})$ di $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ sono connessi. D'altra parte, l'intersezione $\pi(\{-1\} \times \mathbb{R}) \cap \pi(\{1\} \times \mathbb{R})$ contiene il punto $\pi((-1,0)) = \pi((1,0))$; dunque l'unione $\pi(\{-1\} \times \mathbb{R}) \cup \pi(\{1\} \times \mathbb{R}) = \pi(\{-1,1\} \times \mathbb{R})$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$.

(3c) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione polinomiale (e quindi continua) definita ponendo $f(x,y) := xy - 1$ e sia U l'aperto di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $U := f^{-1}((-\infty, 0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy < 1\}$. Poiché $U \supset \mathbb{R} \times \{0\}$, si ha che U è un aperto π-saturo di $\mathbb{R}^2$. Segue che $\pi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ contenente $\pi(O)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $P_n \notin U$ in quanto $f(P_n) = (n+1)\frac{2}{n+1} - 1 = 1 \geq 0$; in particolare, $\pi(P_n) \notin \pi(U)$ altrimenti $P_n \in \pi^{-1}(\pi(P_n)) \subset \pi^{-1}(\pi(U)) = U$. Abbiamo così dimostrato che $\pi(U)$ è un intorno aperto di $\pi(O)$ in $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ tale che $\pi(P_n) \notin \pi(U)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, la successione $\{\pi(P_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $\pi(O)$ in $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.