Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2020/2021

8 gennaio 2021

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di due ore.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\tau_{\mathcal{E}}$ la topologia euclidea di $\mathbb{R}$, sia η la topologia di $\mathbb{R}$ avente $\mathcal{B} = \{[a,b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ come una delle sue basi e sia $(\mathbb{R}^2, \xi)$ il prodotto topologico tra $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}})$ e $(\mathbb{R}, \eta)$. Si calcoli la chiusura del sottoinsieme $\Gamma = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$ di $\mathbb{R}^2$ in $(\mathbb{R}^2, \xi)$.

Esercizio 2. Sia (X, τ) uno spazio topologico T_2 e sia (Y, τ_Y) un suo sottospazio topologico. Supponiamo che Y non abbia punti isolati in (X, τ). Si dimostri che ogni aperto non vuoto di (Y, τ_Y) è un insieme infinito.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano reale dotato della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ definita ponendo:

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \text{ se e soltanto se } (x,y) = (x',y') \text{ oppure } y = y' = 0,$$

ovvero avente le seguenti $\mathcal{R}$-classi di equivalenza: $[(x,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x',0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x' \in \mathbb{R}\}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $[(x,y)]_{\mathcal{R}} = \{(x,y)\}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $y \neq 0$. Indichiamo con $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ la proiezione di passaggio al quoziente.

(2a) Si dimostri che $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ non è compatto.

(2b) Si dimostri che $\pi(\{-1,1\} \times \mathbb{R})$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

(2c) Sia O l'origine $(0,0)$ di $\mathbb{R}^2$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia P_n il punto di $\mathbb{R}^2$ di coordinate $\left(n+1, \frac{2}{n+1}\right)$. Si dimostri che la successione $\{\pi(P_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ non converge a $\pi(O)$ in $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.