Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2022/2023

12 gennaio 2024

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di **due ore**.

Esercizio 1. Sia $\tau_{\mathcal{E}}^1$ la topologia euclidea di $\mathbb{R}$, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia η la topologia di $\mathbb{R}$ definita ponendo

$$\eta := \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-a,a) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R},\, a > 0\}.$$

(1a) Si dimostri che η soddisfa il primo assioma di numerabilità. Si dica inoltre se η è metrizzabile.

(1b) Si calcoli la frontiera del singoletto $\{1\}$ in $(\mathbb{R}, \eta)$.

(1c) Si fornisca un esempio di funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g : (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}}^1) \to (\mathbb{R}, \eta)$ è continua ma $g : (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}}^1) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}}^1)$ non lo è.

(1d) Sia η^* la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di η con $\tau_{\mathcal{E}}^1$ e siano Q e D il quadrato e il disco di $\mathbb{R}^2$ definiti ponendo

$$Q := [0,1] \times [0,1] \qquad \text{e} \qquad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si dimostri che i sottoinsiemi Q e D di $(\mathbb{R}^2, \eta^*)$ sono entrambi compatti. Si dica inoltre quali tra i sottoinsiemi Q e D di $(\mathbb{R}^2, \eta^*)$ sono connessi.

SOLUZIONE (1a) Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{V}(x) := \big\{\big(-|x| - \frac{1}{n}, |x| + \frac{1}{n}\big)\big\}_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Osserviamo che ogni elemento $\big(-|x| - \frac{1}{n}, |x| + \frac{1}{n}\big)$ di $\mathcal{V}(x)$ è un intorno di x in $(\mathbb{R}, \eta)$ in quanto contiene x ed è un aperto di η. Scegliamo arbitrariamente $U \in \mathcal{N}_\eta(x)$. Esiste $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ tale che $x \in (-a,a) \subset U$. Poiché $x \in (-a,a)$, si ha $|x| < a$. Dunque esiste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $x \in (-|x| - \frac{1}{n}, |x| + \frac{1}{n}) \subset (-a,a) \subset U$. Segue che $\mathcal{V}(x)$ è un s.f.i. numerabile di x in $(\mathbb{R}, \eta)$. Dunque η soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Osserviamo che ogni intorno aperto di 1 in $(\mathbb{R}, \eta)$ è della forma $(-a,a)$ con $a > 1$ e quindi contiene sempre 0. Segue che non esistono intorni disgiunti di 0 e di 1 in $(\mathbb{R}, \eta)$. Dunque η non è T_2 ed in particolare non è metrizzabile.

(1b) Osserviamo che $(-1,1) \in \eta$ e $\{1\} \cap (-1,1) = \varnothing$. Dunque, se $\mathcal{F}$ denota la frontiera di $\{1\}$ rispetto a η, allora $\mathcal{F} \cap (-1,1) = \varnothing$. Sia $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ e sia V un intorno aperto arbitrario di x in $(\mathbb{R}, \eta)$ ovvero $V = (-a,a)$ con $a > |x|$. Segue V interseca $\{1\}$ (perchè $1 \in (-a,a)$) e V interseca anche $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (perchè $0 \in (-a,a)$). Dunque, $x \in \mathcal{F}$. Ciò prova che $\mathcal{F} = \mathbb{R} \setminus (-1,1)$.

(1c) Definiamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $g(x) := -1$ se $x < 0$ e $g(x) := 1$ se $x \geq 0$. La funzione $g : (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}}^1) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}}^1)$ non è continua in quanto $g^{-1}((0,+\infty)) = [0,+\infty)$ non è un aperto di $\tau_{\mathcal{E}}^1$ (in quanto 0 non è un punto interno a $[0,+\infty)$ in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}}^1)$). Al contrario, $g : (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{E}}^1) \to (\mathbb{R}, \eta)$ è continua in quanto $g^{-1}((-a,a)) = \varnothing \in \eta$ se $0 < a \leq 1$ e $g^{-1}((-a,a)) = \mathbb{R} \in \eta$ se $a > 1$.

(1d) La topologia η è meno fine di $\tau_{\mathcal{E}}^1$ in quanto $(-a,a) \in \tau_{\mathcal{E}}^1$ per ogni $a > 0$. Segue che anche η^* è meno fine del prodotto topologico di $\tau_{\mathcal{E}}^1$ con se stessa (ovvero della topologia euclidea $\tau_{\mathcal{E}}^2$ di $\mathbb{R}^2$). Equivalentemente, l'applicazione identità $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, \tau_{\mathcal{E}}^2) \to (\mathbb{R}^2, \eta^*)$ è continua. Osserviamo che Q e D sono entrambi sottonsiemi compatti (chiusi e limitati) e connessi (anzi convessi e quindi connessi per archi) di $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\mathcal{E}})$. Poiché la compattezza e la connessione si preservano per immagini continue, si ha che $Q = \mathrm{id}(Q)$ e $D = \mathrm{id}(D)$ sono sottoinsiemi sia compatti che connessi di $(\mathbb{R}^2, \eta^*)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano dotato della topologia euclidea e sia $\mathbb{S}^1$ la circonferenza standard $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ di $\mathbb{R}^2$ dotata della topologia relativa indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$. Definiamo il punto P di $\mathbb{S}^1$, il sottoinsieme $\mathbb{S}^1_+$ di $\mathbb{S}^1$ e la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{S}^1$ ponendo

- $P := (0, -1)$,
- $\mathbb{S}^1_+ := \mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$,
- $[(x,y)]_{\mathcal{R}} := \{P\} \cup \mathbb{S}^1_+$ se $(x,y) \in \{P\} \cup \mathbb{S}^1_+$ e $[(x,y)]_{\mathcal{R}} := \{(x,y)\}$ altrimenti.

Indichiamo con $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{S}^1$ modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ la proiezione naturale al quoziente topologico.

(2a) Si dimostri che lo spazio topologico $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ è T_2.

(2b) Si dica se π è aperta e/o chiusa.

(2c) Si dimostri che $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

SOLUZIONE (2a) Siano $R, S \in \mathbb{S}^1$ tali che $\alpha := \pi(R) \neq \pi(S) =: \beta$. Distinguiamo due casi. Supponiamo che $R = P = (0,-1)$ e $S \in \mathbb{S}^1 \setminus (\{P\} \cup \mathbb{S}^1_+)$. Osserviamo che $S = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$ con $-1 < b < 0$. Definiamo:

$$U := \mathbb{S}^1 \cap \left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \tfrac{-1+b}{2}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \tfrac{b}{2}\}\right),$$
$$V := \mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{-1+b}{2} < y < \tfrac{b}{2}\}.$$

Si osservi che: U è un intorno aperto di $\{P\} \cup \mathbb{S}^1$ in $\mathbb{S}^1$ (e quindi anche un intorno aperto π-saturo di R in $\mathbb{S}^1$), V è un intorno aperto π-saturo di S in $\mathbb{S}^1$ e $U \cap V = \varnothing$. Dunque, $\pi(U)$ è un intorno aperto di α in $\mathbb{S}^1$, $\pi(V)$ è un intorno aperto di β in $\mathbb{S}^1$ e $\pi(U) \cap \pi(V) = \varnothing$, come desiderato.

Supponiamo ora che $R, S \in \mathbb{S}^1 \setminus (\{P\} \cup \mathbb{S}^1_+)$ con $R \neq S$. Poichè $\mathbb{S}^1$ è T_2 anche il suo sottospazio topologico aperto $\mathbb{S}^1 \setminus (\{P\} \cup \mathbb{S}^1_+)$ lo è. Esistono dunque due intorni aperti U di R e V di S in $\mathbb{S}^1 \setminus (\{P\} \cup \mathbb{S}^1_+)$ tali che $U \cap V = \varnothing$. Poiché U e V sono aperti anche in $\mathbb{S}^1$ (perché?) e π-saturi (perché?), si ha che $\pi(U)$ è un intorno aperto di α in $\mathbb{S}^1$, $\pi(V)$ è un intorno aperto di β in $\mathbb{S}^1$ e $\pi(U) \cap \pi(V) = \varnothing$. Questo prova che $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ è T_2.

(2b) π non è aperta infatti, se A denota l'aperto $\mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ di $\mathbb{S}^1$, allora la π-saturazione $\pi^{-1}(\pi(A))$ di A è uguale a $\pi^{-1}(\pi(A)) = \{P\} \cup \mathbb{S}^1_+$, che non è un aperto di $\mathbb{S}^1$ (in quanto l'intersezione di ogni palla aperta euclidea di $\mathbb{R}^2$ centrata in P e di raggio positivo contiene punti di $\mathbb{S}^1 \setminus (\{P\} \cup \mathbb{S}^1_+)$, dunque P non è un punto interno di $\{P\} \cup \mathbb{S}^1_+$ in $\mathbb{S}^1$).

π è chiusa in quanto applicazione continua dallo spazio topologico compatto $\mathbb{S}^1$ (chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$) nello spazio topologico di Hausdorff $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ (si veda il punto (2a)).

(2c) Supponiamo che esista un omeomorfismo $h : \mathbb{S}^1/\mathcal{R} \to \mathbb{S}^1$. Sia $p := \pi(P) \in \mathbb{S}^1/\mathcal{R}$, sia $q := h(p)$ e sia $h' : (\mathbb{S}^1/\mathcal{R}) \setminus \{p\} \to \mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$ l'omeomorfismo ottenuto restringendo h dal sottospazio topologico aperto $(\mathbb{S}^1/\mathcal{R}) \setminus \{p\}$ di $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ (perché è aperto?) al sottospazio topologico aperto $\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$ di $\mathbb{S}^1$. Definiamo i sottoinsiemi A e B di $\mathbb{S}^1$ ponendo

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1 : x < 0, y < 0\} \quad \text{e} \quad B := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1 : x > 0, y < 0\}.$$

Poiché A e B sono aperti disgiunti π-saturi di $\mathbb{S}^1$ tali che $A \sqcup B = \mathbb{S}^1 \setminus (\{P\} \cup \mathbb{S}^1_+)$, si ha che $\pi(A)$ e $\pi(B)$ sono aperti disgiunti di $\mathbb{S}^1/\mathcal{R}$ (e quindi di $(\mathbb{S}^1/\mathcal{R}) \setminus \{p\}$) tali che $\pi(A) \sqcup \pi(B) = \pi(\mathbb{S}^1 \setminus (\{P\} \cup \mathbb{S}^1_+)) = (\mathbb{S}^1/\mathcal{R}) \setminus \{p\}$. Dunque $(\mathbb{S}^1/\mathcal{R}) \setminus \{p\}$ è sconnesso. Poiché $h' : (\mathbb{S}^1/\mathcal{R}) \setminus \{p\} \to \mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$ è un omeomorfismo, anche $\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$ è sconnesso. Quest'ultima affermazione è assurda in quanto $\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$ è omeomorfo alla retta reale $\mathbb{R}$ con topologia euclidea (via proiezione stereografica, ad esempio).