Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2020/2021

17 gennaio 2022

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di **due ore**.

Esercizio 1. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$, denotiamo con $\mathrm{int}(S)$ e con $\mathrm{cl}(S)$ rispettivamente la parte interna e la chiusura di S in (X, τ).

(1a) Si dimostri che, per ogni $A \in \tau$, vale $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) = \mathrm{cl}(A)$.

(1b) Si trovi un esempio di spazio topologico (X, τ) e $A \in \tau$ tale che $A \subsetneq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$.

(1c) Si trovi un esempio di spazio topologico (X, τ) e $A \notin \tau$ tale che $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) \neq \mathrm{cl}(A)$.

SOLUZIONE (1a) Poiché A è un aperto di τ, $A \subset \mathrm{cl}(A)$ e $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$ è il più grande aperto di τ contenuto in $\mathrm{cl}(A)$, si ha che $A \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$ ed inoltre, calcolando la chiusura a sinistra e a destra, $\mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)))$. D'altra parte, vale: $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) \subset \mathrm{cl}(A)$ e quindi, calcolando la chiusura a sinistra e a destra, $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$. Segue che $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) = \mathrm{cl}(A)$.

Supponiamo ora che X sia la retta reale $\mathbb{R}$ dotata della topologia euclidea τ_e.

(1b) Se definiamo $A := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora $A \in \tau_e$ (in quanto, per ogni $x \in A$, la palla aperta $(-|x| + x, x + |x|)$ di $\mathbb{R}$ è contenuta in A), $\mathrm{cl}(A) = \mathbb{R}$ (infatti $\mathbb{R} \setminus \{0\} = A \subset \mathrm{cl}(A) \subset \mathbb{R}$ e $0 \in \mathrm{cl}(A)$, in quanto: $\forall \varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{2} \in (-\varepsilon, \epsilon) \cap A \Longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$), $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (in quanto $\mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$) e quindi $A = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R} = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$ come desiderato.

(1c) Se definiamo $A := \{0\}$ allora A è chiuso in $\mathbb{R}$ (in quanto $\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è aperto in $\mathbb{R}$: si veda il punto precedente), dunque $\mathrm{cl}(A) = A$. Si osservi che A non è aperto in $\mathbb{R}$ in quanto: $\forall \varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{2} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus A \Longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset A$. In particolare, vale: $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{int}(A) = \emptyset$ e quindi $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) = \mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset \neq A = \mathrm{cl}(A)$ come desiderato.

Naturalmente si possono costruire molti altri controesempi per rispondere ai punti (1b) e (1c).

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato della topologia euclidea τ_e. Sia S^2 la 2-sfera standard di $\mathbb{R}^3$ e sia S^1 il suo equatore, ovvero

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad \text{e} \quad S^1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Dotiamo S^2 della topologia relativa indotta da τ_e. Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su S^2 definita ponendo:

$$x\mathcal{R}y \quad \text{se e soltanto se} \quad x = y \quad \text{oppure} \quad x, y \in S^1,$$

ovvero avente le seguenti $\mathcal{R}$-classi di equivalenza: $[x]_\mathcal{R} = \{x\}$ se $x \in S^2 \setminus S^1$ e $[x]_\mathcal{R} = S^1$ se $x \in S^1$. Indichiamo con $S^2/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di S^2 modulo $\mathcal{R}$.

(2a) Si provi che $S^2/\mathcal{R}$ è compatto.

(2b) Si provi che $S^2/\mathcal{R}$ è di Hausdorff.

(2c) Si dica se $S^2/\mathcal{R}$ è omeomorfo a S^2.

SOLUZIONE Siano $\pi : S^2 \to S^2/\mathcal{R}$ la proiezione naturale al quoziente, $A := (1, 0, 0) \in S^1$ e $\alpha := \pi(A) \in S^2/\mathcal{R}$.

(2a) Poiché S^2 è un compatto di $\mathbb{R}^3$ (in quanto chiuso e limitato) e π è continua e surgettiva, segue che $S^2/\mathcal{R} = \pi(S^2)$ è l'immagine continua di compatto, dunque $S^2/\mathcal{R}$ è compatto.

(2b) Siano $\beta, \gamma \in S^2/\mathcal{R}$ con $\beta \neq \gamma$. Distinguiamo due casi.

Supponiamo che uno dei due punti β e γ coincida con α. A meno di scambiare β con γ, possiamo supporre che $\beta = \alpha$. Allora $\gamma \neq \alpha$ e quindi esiste un solo punto $C = (c_1, c_2, c_3) \in S^2 \setminus S^1$ (dunque $c_3 \neq 0$) tale che $\pi(C) = \gamma$. Definiamo l'aperto S_A di S^2 ponendo:

$$S_A := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \,\middle|\, -\tfrac{|c_3|}{4} < x_3 < \tfrac{|c_3|}{4}\right\}$$

Definiamo inoltre l'aperto S_C di S^2 ponendo

$$S_C := \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \,|\, x_3 > \tfrac{c_3}{2}\} \ \text{ se } c_3 > 0$$

e

$$S_C := \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \,|\, x_3 < \tfrac{c_3}{2}\} \ \text{ se } c_3 < 0.$$

Si osservi che: S_A è una fascia equatoriale di S^2; S_C è una calotta sferica contenuta nell'emisfero nord se $c_3 > 0$ e in quello sud se $c_3 < 0$; $S_A \cap S_C = \emptyset$; S_A è π-saturo in quanto contiene tutto l'equatore S^1; S_C è π-saturo in quanto non interseca l'equatore S^1. Segue che $\pi(S_A)$ è un aperto di $S^2/\mathcal{R}$ contenente $\alpha = \beta$ (dunque è un intorno di $\alpha = \beta$ in $S^2/\mathcal{R}$), $\pi(S_C)$ è un aperto di $S^2/\mathcal{R}$ contenente γ (dunque è un intorno di γ in $S^2/\mathcal{R}$) e $\pi(S_A) \cap \pi(S_C) = \emptyset$.

Supponiamo infine che $\beta \neq \alpha$ e $\gamma \neq \alpha$. Siano B e C gli unici punti di S^2 tali che $\pi(B) = \beta$ e $\pi(C) = \gamma$. Poichè $B, C \in S^2 \setminus S^1$ e il sottospazio topologico $S^2 \setminus S^1$ di S^2 (e quindi di $\mathbb{R}^3$) è di Hausdorff (perché?), esistono intorni aperti U di B e V di C in $S^2 \setminus S^1$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Si osservi che U e V sono anche aperti in S^2 (perché?) e sono π-saturi (perché non intersecano l'equatore S^1). Segue che $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono intorni aperti disgiunti rispettivamente di β e di γ in $S^2/\mathcal{R}$.

(2c) Proviamo che $S^2/\mathcal{R}$ non è omeomorfo a S^2. Supponiamo per assurdo che esista un omeomorfismo $h : S^2/\mathcal{R} \to S^2$. Sia E il sottospazio topologico $(S^2/\mathcal{R}) \setminus \{\alpha\}$ di $S^2/\mathcal{R}$, sia F il sottospazio topologico $S^2 \setminus \{h(\alpha)\}$ di S^2 e sia $h' : E \to F$ l'omeomorfismo ottenuto restringendo h. Poichè F è connesso (in quanto omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ via proiezione stereografica dal punto $h(\alpha)$), anche E lo è. Definiamo $S^2_+ := S^2 \cap \{x_3 > 0\}$ e $S^2_- := S^2 \cap \{x_3 < 0\}$. Poichè S^2_+ e S^2_- sono aperti π-saturi disgiunti di S^2 tali che $S^2_+ \cup S^2_- = S^2 \setminus S^1$, si ha che $\pi(S^2_+)$ e $\pi(S^2_-)$ sono due aperti disgiunti di $S^2/\mathcal{R}$ tali che $\pi(S^2_+) \cup \pi(S^2_-) = E$. In particolare, $\pi(S^2_+)$ e $\pi(S^2_-)$ sono due aperti non-vuoti disgiunti di E che ricoprono E stesso. Segue che E è sconnesso, il che è assurdo.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico e sia Y un sottoinsieme di X che sia al contempo aperto e chiuso in X. Si provi che Y è unione di alcune delle (eventualmente di tutte le) componenti connesse di X.

Si trovi inoltre un esempio di spazio topologico X e di sottoinsieme Y di X tali che Y sia unione di alcune delle componenti connesse di X, ma Y non sia né aperto né chiuso in X.

SOLUZIONE Per ogni $p \in X$, denotiamo $\mathcal{C}(p)$ la componente connessa di p in X. Proviamo che $Y = \bigcup_{p \in Y} \mathcal{C}(p)$ ovvero che $\mathcal{C}(p) \subset Y$ per ogni $p \in Y$. Sia $p \in Y$. Poichè Y è aperto e chiuso in X, si ha che $\mathcal{C}(p) \cap Y$ è aperto e chiuso in $\mathcal{C}(p)$. Inoltre $p \in \mathcal{C}(p) \cap Y$, dunque $\mathcal{C}(p) \cap Y \neq \emptyset$. Dal fatto che $\mathcal{C}(p)$ è un sottospazio topologico connesso di X, segue che $\mathcal{C}(p) \cap Y = \mathcal{C}(p)$ ovvero $\mathcal{C}(p) \subset Y$.

Supponiamo ora che X sia lo spazio topologico $\mathbb{Q}$ dotato della topologia relativa indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}$. Allora X è totalmente sconnesso (ovvero le sue componenti connesse coincidono con i suoi singoletti). È sufficiente ora porre $Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{\frac{1}{n}\}$. Si osservi che Y non è né aperto in X (infatti ha parte interna vuota) né chiuso in X (infatti 0 appartiene alla chiusura di Y ma non a Y).