Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2021/2022

17 gennaio 2022

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Il tempo a disposizione è di **due ore**.

Esercizio 1. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$, denotiamo con $\mathrm{int}(S)$ e con $\mathrm{cl}(S)$ rispettivamente la parte interna e la chiusura di S in (X, τ).

(1a) Si dimostri che, per ogni $A \in \tau$, vale $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) = \mathrm{cl}(A)$.

(1b) Si trovi un esempio di spazio topologico (X, τ) e $A \in \tau$ tale che $A \subsetneq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$.

(1c) Si trovi un esempio di spazio topologico (X, τ) e $A \notin \tau$ tale che $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) \neq \mathrm{cl}(A)$.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato della topologia euclidea τ_e. Sia S^2 la 2-sfera standard di $\mathbb{R}^3$ e sia S^1 il suo equatore, ovvero

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad \text{e} \quad S^1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Dotiamo S^2 della topologia relativa indotta da τ_e. Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su S^2 definita ponendo:

$$x\mathcal{R}y \quad \text{se e soltanto se} \quad x = y \quad \text{oppure} \quad x, y \in S^1,$$

ovvero avente le seguenti $\mathcal{R}$-classi di equivalenza: $[x]_{\mathcal{R}} = \{x\}$ se $x \in S^2 \setminus S^1$ e $[x]_{\mathcal{R}} = S^1$ se $x \in S^1$. Indichiamo con $S^2/\mathcal{R}$ lo spazio topologico quoziente di S^2 modulo $\mathcal{R}$.

(2a) Si provi che $S^2/\mathcal{R}$ è compatto.

(2b) Si provi che $S^2/\mathcal{R}$ è di Hausdorff.

(2c) Si dica se $S^2/\mathcal{R}$ è omeomorfo a S^2.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico e sia Y un sottoinsieme di X che sia al contempo aperto e chiuso in X. Si provi che Y è unione di alcune delle (eventualmente di tutte le) componenti connesse di X.

Si trovi inoltre un esempio di spazio topologico X e di sottoinsieme Y di X tali che Y sia unione di alcune delle componenti connesse di X, ma Y non sia né aperto né chiuso in X.