

Funzioni quaternioniche
regolari e problema
 $\bar{\partial}$ -Neumann in \mathbb{C}^2

Alessandro Perotti
Università degli Studi di Trento

Milano, 8 settembre 2003

1. Alcune definizioni

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) = (x_0 + ix_1, x_2 + ix_3) \leftrightarrow$$

$$q = z_1 + z_2j = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \in \mathbb{H}$$

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{H} \approx \mathbb{C}^2$. Una funzione quaternionica $f = f_1 + f_2j \in C^1(\Omega)$ è *regolare* (a sinistra) su Ω se

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \text{ su } \Omega,$$

f è ψ -*regolare* (a sinistra) su Ω se

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} - k\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \text{ su } \Omega.$$

$$f \text{ è } \psi\text{-regolare} \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial z_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_2} = -\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial z_1} \Leftrightarrow$$

$$*\bar{\partial}f_1 = -\frac{1}{2}\partial(\bar{f}_2 d\bar{z}_1 \wedge dz_2).$$

Osservazione 1. Ogni funzione regolare o ψ -regolare è armonica.

Osservazione 2. Ogni mappa olomorfa (f_1, f_2) su Ω definisce una funzione ψ -regolare $f = f_1 + f_2j$.

Osservazione 3. Se Ω è pseudoconvesso, ogni funzione armonica complessa f_1 è componente complessa di una funzione f ψ -regolare su Ω .

2. Risultati principali

2.1 Criterio differenziale di regolarità

Teorema 1. $f = f_1 + f_2j \in C^1(\overline{\Omega})$ è ψ -regolare su Ω se e solo se f è armonica su Ω e

$$(\bar{\partial}_n - jL)f = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (*)$$

□

$\bar{\partial}_n f$ è la componente normale di $\bar{\partial}f$ su $\partial\Omega$, definita da: $\bar{\partial}_n f d\sigma = *\bar{\partial}f|_{\partial\Omega}$,

L è l'operatore di Cauchy-Riemann tangenziale

$$L = \frac{1}{|\bar{\partial}\rho|} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_2} \frac{\partial}{\partial\bar{z}_1} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_1} \frac{\partial}{\partial\bar{z}_2} \right).$$

L'equazione (*) equivale alle due equazioni complesse su $\partial\Omega$

$$\bar{\partial}_n f_1 = -\overline{L(f_2)} \quad (C_1)$$

$$\bar{\partial}_n f_2 = \overline{L(f_1)} \quad (C_2)$$

Si può dare anche una formulazione debole della condizione (*) e ottenere un teorema di traccia:

Teorema 2. *Una funzione continua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{H}$ è traccia di una funzione ψ -regolare su Ω se e solo se soddisfa la condizione integrale*

$$\int_{\partial\Omega} \bar{f} (\bar{\partial}_n - jL) \phi \, d\sigma = 0 \quad \forall \phi \in Harm^1(\bar{\Omega}). \quad \square$$

Dal Teorema 1 si ottiene immediatamente il seguente risultato:

Teorema 3. *$f = f_1 + f_2 j \in C^1(\bar{\Omega})$ è regolare su Ω se e solo se f è armonica su Ω e*

$$(N - jT)f = 0 \text{ su } \partial\Omega, \text{ dove}$$

$$N = \frac{\partial\rho}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial\rho}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad T = \frac{\partial\rho}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial\rho}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial}{\partial z_2}. \quad \square$$

2.2 Criterio differenziale di olomorfia

Se $\partial\Omega$ è connessa, il teorema di Hartogs consente di migliorare i risultati precedenti. Le condizioni

$$\bar{\partial}_n f_1 = -\overline{L(f_2)} \quad (C_1)$$

$$\bar{\partial}_n f_2 = \overline{L(f_1)} \quad (C_2)$$

sono equivalenti: una sola di esse basta per ottenere la ψ -regolarità di f . Questa proprietà può essere sfruttata per ottenere il seguente criterio di olomorfia:

Teorema 4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ limitato con $\partial\Omega$ connessa. Sia $a \in \mathbb{C}$. Se $h \in C^1(\overline{\Omega})$ è armonica complessa e soddisfa la condizione $\bar{\partial}_n h = \overline{aL(h)}$ su $\partial\Omega$, allora h è olomorfa su Ω . \square*

Osservazione. Il caso $a = 0$ corrisponde a un teorema di Aronov e Kytmanov. Condizioni differenziali miste di questo tipo sono state studiate in particolare da Chirka e da Kytmanov.

2.3 Regolarità e problema $\bar{\partial}$ -Neumann

Il problema $\bar{\partial}$ -Neumann per le funzioni complesse può essere così formulato:

$$\bar{\partial}_n g = \phi \text{ su } \partial\Omega, \quad g \text{ armonica in } \Omega,$$

con condizione di compatibilità

$$\int_{\partial\Omega} \phi \bar{h} d\sigma = 0 \quad \forall h \in \mathcal{O}(\bar{\Omega}).$$

Se $\partial\Omega$ è connessa e C^∞ e Ω è strettamente pseudoconvesso oppure pseudoconvesso con frontiera analitica reale, la risolubilità del problema $\bar{\partial}$ -Neumann (Kytmanov) applicata all'equazione (C_2) $\bar{\partial}_n f_2 = \overline{L(f_1)}$ consente di ottenere il:

Teorema 5. *Sia $f_1 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ . Allora f_1 è la traccia su $\partial\Omega$ di una componente complessa di una funzione ψ -regolare f su Ω , C^∞ su $\bar{\Omega}$. \square*

Osservazione. f è univocamente determinata dalla condizione

$$\int_{\partial\Omega} (f - f_1) \bar{h} d\sigma = 0 \quad \forall h \in \mathcal{O}(\bar{\Omega}).$$

Corollario. Sia $M^\infty(\Omega)$ l' \mathbb{H} -modulo destro delle funzioni ψ -regolari, di classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. La mappa C definita da $C(f) = f_1|_{\partial\Omega}$ per ogni $f = f_1 + f_2j \in M^\infty(\Omega)$, induce un isomorfismo di spazi reali

$$\frac{M^\infty(\Omega)}{A^\infty(\Omega, \mathbb{C}^2)} \xrightarrow{\approx} \frac{C^\infty(\partial\Omega)}{CR(\partial\Omega)}.$$

□

2.4 Applicazione: prodotto in $M^\infty(\Omega)$

L'esistenza di un'inversa destra di C

$$M^\infty(\Omega) \begin{array}{c} \xleftarrow{R} \\ \xrightarrow{C} \end{array} C^\infty(\partial\Omega) \iff CR = Id_{C^\infty(\partial\Omega)}$$

permette di definire un prodotto in $M^\infty(\Omega)$, rispetto al quale $M^\infty(\Omega)$ è una \mathbb{R} -algebra *commutativa*, con unità la funzione costante 1, che contiene $A^\infty(\Omega, \mathbb{C}^2)$ come sottoalgebra rispetto al prodotto

$$(f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1g_1 + f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1).$$

3. Dimostrazioni (cenni)

3.1 Teorema 1 (criterio di ψ -regolarità)

Il punto essenziale è una proprietà della forma differenziale associata al nucleo di Cauchy-Fueter per le funzioni ψ -regolari: la sua prima componente complessa coincide con il nucleo di Bochner-Martinelli in dimensione 2.

Si mostra che la formula di rappresentazione di Bochner-Martinelli per le funzioni armoniche si trasforma, sotto la condizione (*), nella formula di rappresentazione di Cauchy-Fueter, da cui la regolarità.

3.2 Teorema 2 (teorema di traccia)

Si mostra, usando la proprietà vista sopra, che l'integrale di Cauchy-Fueter di $f \in C(\partial\Omega)$ si annulla su $\mathbb{C}^2 \setminus \overline{\Omega}$ se vale la condizione

$$\int_{\partial\Omega} \bar{f} (\bar{\partial}_n - jL) \phi \, d\sigma = 0 \quad \forall \phi \in Harm^1(\overline{\Omega}).$$

La formula di salto permette di concludere.

Se $\partial\Omega$ è connessa, e vale una delle condizioni C_1 , C_2 , ad esempio la seconda, l'integrale di Cauchy-Fueter di f definisce su $\mathbb{C}^2 \setminus \overline{\Omega}$ una funzione ψ -regolare, a valori complessi \Rightarrow olomorfa \Rightarrow si estende olomorficamente su \mathbb{C}^2 .

Si ottiene così una $F = F^+ - \tilde{F}|_{\Omega}^-$ ψ -regolare su Ω , con traccia f su $\partial\Omega$.

3.3 Teorema 4 (criterio di olomorfia)

Posto $f = ah + hj$, si ottiene che la condizione C_2 è soddisfatta, per cui f è ψ -regolare. Dalle equazioni di ψ -regolarità si ottiene

$$\bar{\partial}h = 0.$$

3.4 Teorema 5 (problema $\bar{\partial}$ -Neumann)

La tesi segue facilmente dal fatto che $\phi = \overline{L(f_1)}$ soddisfa la condizione di compatibilità per il problema $\bar{\partial}$ -Neumann. Ne segue l'esistenza di f_2 tale che $\bar{\partial}_n f_2 = \overline{L(f_1)}$.

Se $\partial\Omega$ è connessa, $f = f_1 + f_2j$ è ψ -regolare poiché soddisfa la condizione C_2 .

3.5 Formula per il prodotto in $M^\infty(\Omega)$

Date $f, g \in M^\infty(\Omega)$, sia

$$f * g = R(f_1 g_1) - (f - R(f_1))j(g - R(g_1))$$

dove $f_1 = C(f)$, $g_1 = C(g)$, $CR = Id_{C^\infty(\partial\Omega)}$.

Posto $\phi : M^\infty(\Omega) \rightarrow M^\infty(\Omega)$

$$\phi(f) = f(1 - j)/2, \quad \phi^{-1}(f) = f(1 + j)$$

il prodotto $m_\Omega(f, g)$ è definito da

$$m_\Omega(f, g) = \phi(\phi^{-1}(f) * \phi^{-1}(g)).$$

Esempio. Sulla palla unitaria B , il prodotto della funzione ψ -regolare, non olomorfa,

$$f = (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)j$$

per se stessa è la funzione ψ -regolare

$$m_B(f, f) = (\bar{z}_1^2 + 2z_1\bar{z}_2) + (2z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1^2)j$$

e il prodotto di f per $g = z_1 - z_1j$ è

$$m_B(f, g) = m_B(g, f) = (|z_1|^2 - |z_2|^2 + \bar{z}_1\bar{z}_2 + 1) + (|z_2|^2 - |z_1|^2 + \bar{z}_1\bar{z}_2 - 1)j.$$